

М. А. ПЛЕСКУНОВ

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

М. А. Плескунов

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся
по УГН 01.00.00 «Математика и механика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2022

УДК 519.872(075.8)

ББК 22.18я73

П38

Рецензенты:

кафедра экономики и информатизации факультета компьютерных технологий АНО ВО «Гуманитарный университет» (завкафедрой, д-р экон. наук, доц. *Н. В. Хмелькова*);

ст. науч. сотр. отдела оптимального управления ИММ УрО РАН, канд. физ.-мат. наук *Д. С. Завалищин*

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. *А. Н. Сесекин*

На обложке использовано изображение с сайта <https://rohitswami.com/assets/images/projects/smart-q-labs.jpg>

Плескунов, Михаил Александрович.

П38 Теория массового обслуживания : учебное пособие / М. А. Плескунов ; М-во науки и высшего образования РФ, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2022. — 264 с.

ISBN 978-5-7996-3539-8

В учебном пособии содержатся основные понятия теории массового обслуживания, рассмотрены системы с фиксированной очередью (задачи упорядочения), одноканальные и многоканальные системы с отказами, системы с неограниченным и ограниченным (по длине очереди или по времени) ожиданием обслуживания, замкнутые системы, многоканальные системы с взаимодействием между каналами. Особое внимание уделено методам расчета показателей качества и эффективности работы таких систем. Также в пособие включены варианты индивидуальных заданий, предназначенные для проработки математических методов анализа систем массового обслуживания рассмотренных в пособии типов.

Библиогр.: 11 назв. Рис. 38.

УДК 519.872(075.8)

ББК 22.18я73

ISBN 978-5-7996-3539-8

© Уральский федеральный
университет, 2022

Оглавление

Основные понятия теории массового обслуживания	5
1. Структура, классификация и предмет теории СМО.....	7
2. СМО с фиксированной очередью (задачи упорядочения)	11
3. Поток событий	35
4. Процесс гибели и размножения	54
5. СМО с отказами	62
5.1. Одноканальная СМО с отказами.....	62
5.2. Многоканальная СМО с отказами	67
6. СМО с ожиданием (очередью).....	76
6.1. Одноканальная СМО с неограниченной очередью	77
6.2. Многоканальная СМО с неограниченной очередью.....	85
7. СМО с ограниченной очередью.....	97
7.1. Одноканальная СМО с ограниченной очередью.....	97
7.2. Многоканальная СМО с ограниченной очередью	108
8. СМО с ограничением на время ожидания в очереди.....	119
8.1. Многоканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками	120
8.2. Одноканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками	128
9. Замкнутые системы массового обслуживания (системы Энгсета)	138
9.1. Одноканальная замкнутая СМО	139
9.2. Многоканальная замкнутая СМО	153
9.3. Особенности замкнутых СМО.....	169
10. Многоканальные СМО со взаимопомощью между каналами типа «все как один»	171
10.1. Система с отказами и взаимопомощью между каналами типа «все как один».....	172

10.2. Система с неограниченной очередью и взаимопомощью между каналами типа «все как один»	185
10.3. Система с ограниченной очередью и взаимопомощью между каналами типа «все как один»	197
10.4. Особенности работы многоканальных СМО в режиме взаимопомощи каналов типа «все как один»	208
11. СМО с равномерной взаимопомощью между каналами	210
11.1. Система с отказами	211
11.2. Система с ограниченной очередью.....	214
11.3. Система с неограниченной очередью.....	218
Индивидуальные домашние задания по ТМО.....	231
Приложение 1.....	240
Приложение 2.....	242
Приложение 3.....	257
Библиографический список	261

Главная цель расчетов — не цифры, а понимание.

*Р. Хемминг*¹

Основные понятия теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания (ТМО) — научная дисциплина, занимающаяся математическим моделированием постоянно повторяющихся однотипных задач в одних и тех же условиях их появления, анализом способов их решения в целях повышения эффективности этих решений.

Система массового обслуживания (СМО) — система, предназначенная для многократно повторяющегося (многоразового) использования при решении однотипных задач.

Процесс обслуживания — решение такой системой возникающей типовой задачи.

Задача обслуживания — повторяющаяся типовая задача, возникающая в СМО.

Заявка (требование) — объект обслуживания в СМО, для которого решается типовая задача обслуживания.

¹ Р. Хемминг — известный американский ученый в области разработки и применения методов вычислительной математики.

Поток заявок — последовательность объектов, подлежащих обслуживанию в СМО.

Канал обслуживания — обслуживающая единица, т.е. элемент системы, предназначенный для решения задачи обслуживания.

Очередь — последовательность заявок, ожидающих обслуживания.

Дисциплина обслуживания — правила, определяющие порядок выбора заявок из числа поступивших и порядок их распределения между каналами обслуживания.

Показатели эффективности СМО — показатели, описывающие способность СМО справляться с потоком заявок.



1. Структура, классификация и предмет теории СМО

Структура СМО

В структуре СМО выделяют следующие элементы:

- входящий поток заявок;
- очередь (если ее наличие предусмотрено системой);
- каналы обслуживания;
- выходящий поток заявок.

Выходящий поток может делиться на поток обслуженных заявок и поток заявок, оставшихся без обслуживания. Последний, в свою очередь, может делиться на:

- поток заявок, которым было отказано в обслуживании;
- поток заявок, покинувших систему из-за превышения лимита времени нахождения в системе.

Структурная схема СМО представлена на рис. 1.

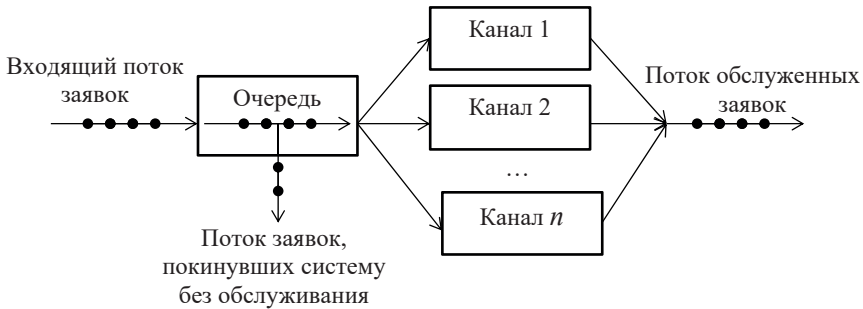


Рис. 1

Классификация СМО

По типу обслуживания выделяют два основных класса СМО:

- СМО с отказами — СМО, в которых заявка, поступившая в тот момент, когда все каналы СМО заняты, получает отказ в обслуживании, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. Эти СМО называют также системами без очереди;
- СМО с ожиданием — СМО, в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы системы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание. Эти СМО называют также системами с очередью. СМО с ожиданием подразделяются на:
 - СМО с неограниченным ожиданием (с неограниченной очередью);
 - СМО с ограниченным ожиданием двух типов: с ограничением на длину очереди и с ограничением на время пребывания заявки в очереди (или на общее время пребывания заявки в системе).

По характеру поступающего потока заявок СМО делят на:

- немарковские системы;
- марковские системы.

По числу каналов СМО делят на:

- одноканальные;
- многоканальные.

По количеству этапов обслуживания их делят на:

- однофазные — заявка проходит только одну стадию (фазу) обработки, все каналы выполняют одну и ту же операцию;
- многофазные — заявка проходит последовательно несколько стадий обработки в системе, каждый канал проводит заявку через все необходимые ей фазы.

По схеме обслуживания заявок из очереди (по дисциплине очереди) СМО делят на:

- СМО с упорядоченной очередью (обслуживание в соответствии с определенным порядком);
- СМО с неупорядоченным (случайным) выбором заявок из очереди;
- СМО с обслуживанием заявок в соответствии с приоритетом.

Очередь может быть упорядочена разными способами: в порядке поступления заявок (заявка, поступившая первой, обрабатывается первой и т. д.), в обратном порядке (заявка, поступившая последней, обрабатывается первой и т. д.) и другими способами. При обслуживании заявок с приоритетом в первую очередь обслуживаются наиболее важные заявки. Абсолютный приоритет означает, что более важная заявка «вытесняет» из-под обслуживания менее важную. Относительный приоритет означает, что более важная заявка получает лучшее место в очереди, т. е. выстраивается ранжированная по важности очередь заявок. Приоритет может быть статичным (не меняться с течением времени) и динамичным (повышаться с увеличением времени ожидания в очереди с разным коэффициентом для разных заявок).

По ограничению потока заявок выделяют:

- открытые СМО, в них заявки поступают в неограниченном количестве из источников вне самой системы;
- замкнутые СМО (количество источников ограничено), в которых источники заявок включены в саму систему; заявка из такого источника, покинувшая систему, через какое-то время может снова в нее возвратиться.

По времени обслуживания заявок рассматривают:

- СМО со случайным временем обслуживания каждой заявки;
- СМО с заданным временем обслуживания заявок, которое может быть одинаковым для всех заявок и разным для разных заявок.

По способу формирования множества заявок выделяют:

- СМО с фиксированной очередью. В них очередь формируется до начала работы системы и в процессе ее работы новые заявки в очередь не поступают;
- СМО с потоком заявок. Заявки поступают в такую систему в продолжение всего времени работы системы. Поток заявок в этом случае может быть:
 - регулярным, когда заявки поступают в систему в заранее фиксированные моменты времени или через определенные промежутки времени;

- случайным, когда заявки поступают в систему в случайные, заранее не определенные моменты времени.

Предмет теории массового обслуживания

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, характер потока заявок, организация работы и т. п.) с показателями эффективности функционирования СМО.

К числу показателей эффективности функционирования СМО относят три основных группы показателей.

1. Основные показатели эффективности использования СМО:

- среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
- средняя доля заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, от среднего числа заявок, поступающих в СМО за то же время;
- средняя продолжительность периода занятости СМО;
- средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием заявок;
- средняя доля времени, в течение которого СМО простаивает, т. е. не занята обслуживанием заявок.

2. Основные показатели качества обслуживания:

- среднее время ожидания обслуживания;
- среднее время пребывания заявки в СМО;
- вероятность отказа в обслуживании без ожидания;
- вероятность того, что прибывшая заявка немедленно будет принята к обслуживанию;
- среднее число заявок, находящихся в СМО;
- среднее число заявок в очереди;
- вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение.

3. Основные показатели экономической эффективности функционирования СМО:

- средний доход, приносимый СМО в единицу времени;
- отношение среднего дохода к затратам на содержание и функционирование СМО в единицу времени (т. е. средний доход, приходящийся на единицу затрат);
- потеря дохода в результате отказа части заявок в обслуживании.



2. СМО с фиксированной очередью (задачи упорядочения)

1. Задача минимизации штрафа за задержку обслуживания.

Будем рассматривать один пункт обслуживания с поступившим на него определенным количеством заявок (*n* заявок), т. е. одноканальную СМО с образовавшейся очередью. Каждая заявка имеет свое определенное время обслуживания. Задержка обслуживания каждой заявки влечет за собой определенный для каждой заявки штраф. Необходимо так выстроить последовательность обслуживания имеющихся заявок, чтобы минимизировать суммарный штраф.

Примеры подобных систем: грузовой причал морского порта с пришедшими к нему для разгрузки судами, которые имеют разный объем с различными по сроку хранения и реализации грузами. В силу этого у них отличаются время обслуживания и штраф за задержку обслуживания на единицу времени (час, сутки и т. п.). То же самое для грузовой платформы ж/д станции с подошедшими для разгрузки поездами

или вагонами, имеющими разнокачественный груз: продовольственные товары, промышленные изделия, горюче-смазочные материалы и т. п. Такая же ситуация может возникнуть при обработке документации различного объема, важности и срочности.

Итак, имеется один пункт обслуживания и n ожидающих обслуживания заявок. Каждая заявка имеет свое время обслуживания и штраф за его задержку. Обозначим время обслуживания i -й заявки как T_i , а штраф за задержку обслуживания этой заявки на единицу времени (минута, час, сутки и т. п.) — C_i ; N_i — номер заявки. Сведем все данные в табличную форму (см. ниже).

№	1	2	3	...	n
T_i	T_1	T_2	T_3	...	T_n
C_i	C_1	C_2	C_3	...	C_n

Показатель эффективности рассматриваемой СМО — суммарный штраф за задержку обслуживания. Разные последовательности обслуживания заявок дают в общем случае разный суммарный штраф, т. е. разную эффективность СМО. Решение задачи сводится к определению такого порядка обслуживания (установлению такой последовательности обслуживания заявок), который обеспечивает минимальный суммарный штраф за задержку обслуживания всех этих заявок. Такие задачи называются задачами упорядочения.

Число возможных различных последовательностей из n заявок равно числу всевозможных перестановок из n элементов ($n!$). Это число может быть весьма велико (например, $10! = 3\,628\,800$), но оно конечно. Следовательно, среди этих последовательностей найдется по крайней мере одна такая, которая даст решение поставленной задачи, т. е. обеспечит минимальный суммарный штраф обслуживания. Такую последовательность будем называть оптимальной. Произвольную последовательность заявок обозначим символом α . Символом α_0 обозначим оптимальную последовательность. Может оказаться, что существует несколько оптимальных последовательностей. Это будет означать, что данная задача имеет не единственное решение, т. е. будут существовать несколько последовательностей обслуживания заявок, обеспечивающих одинаковый минимальный суммарный штраф за задержку обслуживания. Суммарный штраф от некоторой последовательности α

обслуживания заявок обозначим $S(\alpha)$. Тогда суммарный штраф от оптимальной последовательности будет равен $S(\alpha_0)$.

Поскольку оптимальная последовательность обслуживания заявок существует у каждой задачи рассматриваемого типа, будем считать, что она нами уже найдена (хотя бы одна для каждой задачи) и что заявки пронумерованы в соответствии с этой последовательностью, т.е. $\alpha_0 = (1, 2, 3, \dots, n)$. Суммарный штраф $S(\alpha_0) = S(1, 2, 3, \dots, n) = \min S(\alpha)$. Рассмотрим найденную последовательность $\alpha_0 = (1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots, n)$. Очевидно, что любые два элемента конечной последовательности можно поменять местами, последовательно меняя местами два соседних элемента. Следовательно, любая последовательность заявок может быть получена из оптимальной последовательности путем конечного числа изменения мест двух соседних элементов. Это значит, что вывод, полученный при рассмотрении изменения штрафа после перестановки двух произвольных соседних заявок в оптимальной последовательности, можно распространить на произвольную последовательность заявок, которая отличается от рассмотренной оптимальной.

Поменяем местами k -ю и $k+1$ -ю заявки в оптимальной последовательности $\alpha_0 = (1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots, n)$. В результате получим последовательность $\alpha = (1, 2, 3, \dots, k-1, k+1, k, k+2, \dots, n)$, которая в общем случае уже не является оптимальной. Возможно, что она останется оптимальной, но это будет частным случаем конкретной задачи. В любом случае суммарный штраф от новой последовательности будет не меньше, чем штраф от прежней оптимальной последовательности обслуживания заявок. Таким образом,

$$S(\alpha_0) = S(1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots, n) \leq S(1, 2, 3, \dots, k-1, k+1, k, k+2, \dots, n) = S(\alpha).$$

Возможное увеличение штрафа равно $\Delta S(\alpha) = S(\alpha) - S(\alpha_0) \geq 0$. Найдем величину $\Delta S(\alpha)$. Заявка с номером k , переместившись на $k+1$ -е место, будет теперь ждать пока идет обслуживание $k+1$ -й заявки, занявшей ее место. Это время равно T_{k+1} , штраф за задержку обслуживания k -й заявки на единицу времени равен C_k . Общий штраф в результате этого перемещения увеличится на величину $C_k T_{k+1}$. Одновременно с этим общий штраф уменьшится за счет перемещения $k+1$ -й заявки на k -е место на величину $C_{k+1} T_k$, т.к. время ожидания обслуживания $k+1$ -й заявки уменьшится на T_k , поскольку ей не нужно будет ждать обслуживания k -й заявки, а штраф за задержку обслуживания на единицу времени у $k+1$ -й заявки равен C_{k+1} . Итак, величина общего

штрафа изменится на $\Delta S(\alpha) = C_k T_{k+1} - C_{k+1} T_k \geq 0$. Номер k был выбран произвольно в пределах от 1 до $n - 1$. Это значит, что неравенство $C_k T_{k+1} - C_{k+1} T_k \geq 0$ определяет оптимальную последовательность, если выполняется при любом $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$. В этом случае перестановка любых двух соседних заявок приводит к увеличению суммы общего штрафа, если для таких заявок неравенство выполнялось как строгое, и последовательность обслуживания перестает быть оптимальной. Если же для каких-то соседних заявок это неравенство переходит в равенство, то перестановка таких заявок не меняет оптимальности полученной последовательности и общая сумма штрафа остается прежней, т. е. минимальной. В этом случае получаем второе решение нашей задачи. Представим неравенство $C_k T_{k+1} - C_{k+1} T_k \geq 0$ в виде $C_k T_{k+1} \geq C_{k+1} T_k$. Для любой заявки время ее обслуживания $T_i > 0$, поэтому $T_k > 0$ и $T_{k+1} > 0$. Разделим обе части неравенства на $T_k T_{k+1} > 0$. Получим характеризующее оптимальную последовательность заявок неравенство

$$\frac{C_k}{T_k} \geq \frac{C_{k+1}}{T_{k+1}}, \text{ которое должно выполняться для любого } k = 1, 2, 3, \dots,$$

$n - 1$.

Отношение $\frac{C_i}{T_i}$ будем называть *относительным штрафом* i -й

заявки.

Таким образом, чтобы последовательность обслуживания заявок была оптимальной, требуется выполнение последовательности неравенств

$$\frac{C_1}{T_1} \geq \frac{C_2}{T_2} \geq \frac{C_3}{T_3} \geq \dots \geq \frac{C_n}{T_n}.$$

Отсюда следует правило построения оптимальной последовательности обслуживания заявок, обеспечивающей минимальный суммарный штраф за задержку обслуживания: *первыми должны обслуживаться заявки, имеющие больший относительный штраф*.

Пример.

К причалу морского порта подошли для разгрузки 10 судов. Время разгрузки (в часах) и штраф за задержку обслуживания (в каких-то денежных единицах за час ожидания, например в тыс. руб.) отражены ниже.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i	6	8	7	5	3	2	4	1	3	5
C_i	4	2	3	6	1	4	5	2	6	3

Нужно найти порядок обслуживания, минимизирующий суммарный штраф ожидания разгрузки, определить величину этого штрафа и сравнить ее с суммарным штрафом от обслуживания в порядке исходной нумерации заявок.

Решение.

Сначала найдем суммарный штраф при обслуживании заявок в порядке их исходной нумерации. Время ожидания обслуживания k -й по очереди заявки равно $T_{\text{ож}}(k) = T_1 + T_2 + \dots + T_{k-1}$. Штраф за ожидание обслуживания k первых по очереди заявок можно найти следующим образом:

$$S(1, 2, \dots, k) = C_1 \cdot 0 + C_2 T_1 + C_3(T_1 + T_2) + \dots + C_k(T_1 + T_2 + \dots + T_{k-1}).$$

Первая заявка имеет нулевое ожидание, вторая ждет, пока будет обслужена первая заявка, третья заявка ожидает обслуживания первых двух заявок и т. д.

Общий штраф за задержку обслуживания всех заявок в последовательности исходной нумерации $\alpha = (1, 2, \dots, n)$ равен

$$S(\alpha) = S(1, 2, \dots, n) = C_1 \cdot 0 + C_2 T_1 + C_3(T_1 + T_2) + \dots + C_n(T_1 + T_2 + \dots + T_{n-1}).$$

Для упрощения подсчета и его наглядности можно воспользоваться диаграммой Ганта. В диаграммах Ганта процесс, занимающий определенный интервал времени, изображается на графике отрезком соответствующей длины в выбранном масштабе. По оси x откладываем текущее время, по оси y — номера заявок в исходном варианте. Время обслуживания каждой заявки изображаем отрезком прямой, параллельным оси абсцисс, на месте соответствующей заявки. Последовательность выполнения заявок отражается на графике последовательностью соответствующих отрезков.

Ниже представлена диаграмма Ганта для последовательности обслуживания в исходном порядке (рис. 2).

Над каждым отрезком, изображающим процесс обслуживания заявки, поставим значение штрафа C_i , соответствующего этой заявке. На оси абсцисс отразим время протекания процесса обслуживания. Фиксируем время окончания обслуживания очередной заявки.

Это время является также временем ожидания обслуживания следующей заявки. Первая заявка заканчивает обслуживание через 6 ч после начала процесса обслуживания, вторая — через 14 ч ($6 + 8$), третья — через 21 ч ($14 + 7$) и т. д. Соответственно, у первой заявки ожидание отсутствует, вторая заявка ждет обслуживания 6 ч, третья — 14 ч, четвертая — 21 ч, пятая — 26 ч и т. д.

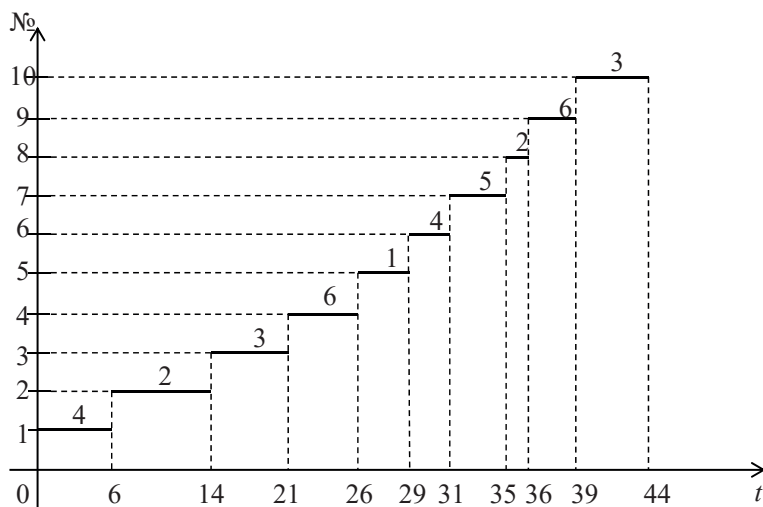


Рис. 2

Подсчитаем суммарный штраф обслуживания:

$$S(\alpha) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 14 + 6 \cdot 21 + 1 \cdot 26 + 4 \cdot 29 + 5 \cdot 31 + 2 \cdot 35 + 6 \cdot 36 + 3 \cdot 39 = 880.$$

Найдем оптимальную последовательность обслуживания заявок. Для этого рассчитаем относительный штраф C_i/T_i каждой заявки и расположим заявки в порядке уменьшения их относительного штрафа (см. ниже).

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i	6	8	7	5	3	2	4	1	3	5
C_i	4	2	3	6	1	4	5	2	6	3
C_i/T_i	2/3	1/4	3/7	6/5	1/3	2	5/4	2	2	3/5
$N_{\text{опт}}$	6	10	8	5	9	1	4	2	3	7

$N_{\text{опт}}$ — оптимальное расположение (последовательность) обработки заявок.

Последовательность относительных штрафов данной задачи имеет вид:

$$2 = 2 = 2 > 5/4 > 6/5 > 2/3 > 3/5 > 3/7 > 1/3 > 1/4.$$

Для заявок № 6, № 8, № 9 относительный штраф одинаковый (равен 2), поэтому эти три заявки можно менять между собой местами. Таким образом, существует 6 (3!) равнозначных решений поставленной задачи, т. е. 6 оптимальных последовательностей обслуживания, обеспечивающих одинаковый минимальный размер штрафа:

$$\alpha_{01} = (6, 8, 9, 7, 4, 1, 10, 3, 5, 2);$$

$$\alpha_{02} = (8, 9, 6, 7, 4, 1, 10, 3, 5, 2);$$

$$\alpha_{03} = (9, 6, 8, 7, 4, 1, 10, 3, 5, 2);$$

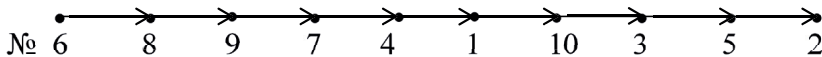
$$\alpha_{04} = (8, 6, 9, 7, 4, 1, 10, 3, 5, 2);$$

$$\alpha_{05} = (6, 9, 8, 7, 4, 1, 10, 3, 5, 2);$$

$$\alpha_{06} = (9, 8, 6, 7, 4, 1, 10, 3, 5, 2).$$

Одна из оптимальных последовательностей обработки заявок (с сохранением их исходной нумерации) такова: $\alpha_0 = (6, 8, 9, 7, 4, 1, 10, 3, 5, 2)$.

Изобразим графически последовательность обработки заявок:



Ниже представлена диаграмма Ганта для оптимальной последовательности α_0 (рис. 3):

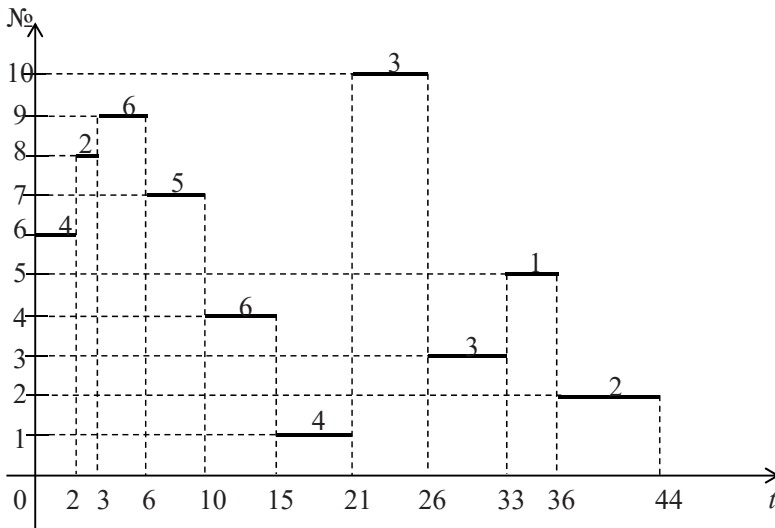


Рис. 3

Штраф для оптимальной последовательности обслуживания заявок равен

$$S_{\min} = S(\alpha_0) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 21 + 3 \cdot 26 + 1 \cdot 33 + 2 \cdot 36 = 418.$$

$$\Delta S = S(\alpha) - S(\alpha_0) = S(\alpha) - S_{\min} = 880 - 418 = 462.$$

Штраф для оптимальной последовательности обслуживания заявок меньше на 462 денежных единицы (тыс. руб.) штрафа для исходной последовательности.

2. Задача одного станка (задача «директора»).

Если в задаче минимизации штрафа за задержку обслуживания штраф каждой заявки одинаков и равен некоторой постоянной величине C , т.е. для всех заявок $C_i = C$, то задача называется задачей одного станка, или задачей «директора». В этом случае неравенство $C_k T_{k+1} \geq C_{k+1} T_k$, выполнение которого для любого $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ определяет оптимальную последовательность обслуживания заявок предыдущей задачи, принимает вид $CT_{k+1} \geq CT_k$. Обе части этого неравенства можно поделить на $C > 0$, тогда оно примет вид $T_{k+1} \geq T_k$, или $T_k \leq T_{k+1}$. Следовательно, выполнение цепочки неравенств,

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \dots \leq T_n,$$

определяет оптимальную последовательность обслуживания таких заявок.

Правило построения оптимальной последовательности обслуживания заявок, обеспечивающей минимальный суммарный штраф за задержку обслуживания в данной ситуации, формулируется так: *первыми должны обслуживаться заявки, имеющие меньшее время обслуживания.*

Суммарный штраф равен произведению суммарного времени ожидания всех заявок очереди на величину C штрафа за задержку обслуживания каждой заявки на единицу времени: $S(\alpha) = C \sum T_i^{\text{ож}}$, где $T_i^{\text{ож}}$ — время ожидания i -й заявки. Если $C = 1$, то суммарный штраф численно равен суммарному времени ожидания обслуживания всех заявок и его минимизация сводится к минимизации этого времени. В этом случае задачу одного станка (задачу «директора») можно сформулировать таким образом: имеется n заявок, каждая из которых имеет свое время обслуживания T_i . Требуется так организовать их обслуживание, т.е. найти такую последовательность обработки этих заявок, чтобы суммарное время ожидания обслуживания всех заявок было минимальным.

Пример.

На прием к директору предприятия записалось 10 сотрудников. Предварительный анализ тем собеседования позволил выяснить примерное время обсуждения каждого вопроса. В каком порядке следует принимать посетителей, чтобы общее время ожидания приема оказалось минимальным? Аналогичная задача возникает при необходимости обработки различных по затратам времени деталей одним станком или лабораторией при проведении различных по сложности анализов, когда необходимо минимизировать общее время ожидания, а также в других подобных ситуациях. Сравнить суммарный штраф (общее время ожидания) в первоначальном и оптимальном режимах. Номера заявок и время их обслуживания (в минутах или часах) представлены ниже.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i	4	3	1	2	6	7	5	8	5	9

Решение.

Сначала найдем время ожидания обслуживания $T_i^{\text{ож}}$ каждой заявки и суммарное время ожидания обслуживания всех стоящих в очереди заявок в порядке их исходной нумерации.

Ожидание обслуживания первой заявки равно нулю, второй — времени обслуживания первой заявки, третьей — сумме времени обслуживания первой и второй заявок и т. д.

$$T_1^{\text{ож}} = 0, T_2^{\text{ож}} = T_1 = 4, T_3^{\text{ож}} = T_1 + T_2 = 4 + 3 = 7, T_4^{\text{ож}} = T_1 + T_2 + T_3 = 4 + 3 + 1 = 8, \dots, T_{10}^{\text{ож}} = T_1 + \dots + T_9 = 4 + 3 + \dots + 5 = 41.$$

Занесем данные в табличную форму (см. ниже).

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i	4	3	1	2	6	7	5	8	5	9
$T_i^{\text{ож}}$	0	4	7	8	10	16	23	28	36	41

Суммарное время ожидания всех десяти заявок:

$$\sum T_i^{\text{ож}} = 0 + 4 + 7 + 8 + 10 + 16 + 23 + 28 + 36 + 41 = 173.$$

Штраф за задержку обслуживания каждой заявки положим равным некоторой константе C . Тогда общий штраф будет равен $S(\alpha) = 173C$.

Найдем теперь оптимальную очередь обслуживания заявок, минимизирующую общее время ожидания. Будем первыми обрабатывать заявки с меньшим временем обслуживания. В этом случае первой будет обрабатываться заявка № 3, второй — заявка № 4, третьей — заявка № 2 и т. д. Последней в очереди будет стоять заявка № 10, имеющая наибольшее время обработки — 9 мин.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i	4	3	1	2	6	7	5	8	5	9
$T_i^{\text{ож}}$	0	4	7	8	10	16	23	28	36	41
$N_{\text{опт}}$	4	3	1	2	7	8	5	9	6	10

$N_{\text{опт}}$ — оптимальная нумерация очереди, № — исходная нумерация заявок.

Выстроим графически последовательность обработки заявок (см. ниже).



Найдем время ожидания $T_{i \text{ож}}^{\text{опт}}$ i -й заявки в оптимальной очереди. Заявка № 3 обрабатывается первой, ее ожидание равно нулю. Заявка № 4 обрабатывается второй, ее ожидание равно времени обработки заявки № 3, т. е. 1 мин. Заявка № 2 обрабатывается третьей, ее ожидание равно сумме времени обработки заявок № 3 и № 4, т. е. 3 мин ($1 + 2$). Другими словами, это ожидание равно сумме времени ожидания предшествующей заявки и времени обслуживания этой же предшествующей заявки (заявки № 4):

$$T_{2 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_3 + T_4 = T_{4 \text{ож}}^{\text{опт}} + T_4 = 1 + 2 = 3.$$

Заявка № 1 является четвертой в оптимальной очереди. Ей предшествует заявка № 2. Таким образом, ожидание заявки № 1 равно ожиданию заявки № 2 плюс время обработки заявки № 2: $T_{1 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_{2 \text{ож}}^{\text{опт}} + T_2 = 3 + 3 = 6$. Точно так же подсчитываются ожидания остальных заявок. Получаем:

$$T_{3 \text{ож}}^{\text{опт}} = 0, \quad T_{4 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_3 = 1, \quad T_{2 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_3 + T_4 = 1 + 2 = 3, \quad T_{1 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_{2 \text{ож}}^{\text{опт}} + T_2 = 3 + 3 = 6,$$

$$T_{7 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_{1 \text{ож}}^{\text{опт}} + T_1 = 6 + 4 = 10, \quad T_{9 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_{7 \text{ож}}^{\text{опт}} + T_7 = 10 + 5 = 15,$$

$$T_{5 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_{9 \text{ож}}^{\text{опт}} + T_9 = 15 + 5 = 20, \quad T_{6 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_{5 \text{ож}}^{\text{опт}} + T_5 = 20 + 6 = 26,$$

$$T_{8 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_{6 \text{ож}}^{\text{опт}} + T_6 = 26 + 7 = 33, \quad T_{10 \text{ож}}^{\text{опт}} = T_{8 \text{ож}}^{\text{опт}} + T_8 = 33 + 8 = 41.$$

Сведем данные в табличную форму (см. ниже).

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i	4	3	1	2	6	7	5	8	5	9
$T_i^{\text{ож}}$	0	4	7	8	10	16	23	28	36	41
$N_{\text{опт}}$	4	3	1	2	7	8	5	9	6	10
$T_{i \text{ож}}^{\text{опт}}$	6	3	0	1	20	26	10	33	15	41

Заявки № 7 и № 9 имеют одинаковое время обслуживания (5 мин). Поэтому в оптимальной очереди их можно поменять местами (5-е и 6-е место), оптимальность очереди от этого не нарушится.

Суммарное время ожидания обслуживания в порядке оптимальной очереди $\sum T_{i \text{ож}}^{\text{опт}} = 0 + 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 20 + 26 + 33 + 41 = 155$ (мин).

Минимальная сумма штрафа составляет $S(\alpha_0) = 155C$.

Разница в сумме штрафа при исходном и оптимальном формировании очереди $\Delta S = S(\alpha) - S(\alpha_0) = 173C - 155C = 18C$, т.е. сумма штрафа за счет рационального выбора порядка обслуживания уменьшилась на $18C$ единиц. Это произошло в результате уменьшения общего времени ожидания обработки заявок на 18 единиц времени (мин, ч и т. п.). Отметим, что само время обслуживания всех заявок остается неизменным при любом способе формирования очереди. В данном примере продолжительность обслуживания всех заявок равна

$$\sum T_i = 4 + 3 + 1 + 2 + 6 + 7 + 5 + 8 + 5 + 9 = 50 \text{ ед. времени.}$$

3. Задача двух станков. Алгоритм Джонсона.

Рассмотрим обслуживание заявок, проходящих две фазы обработки: сначала заявка обрабатывается на пункте A и только после окончания такой обработки она обрабатывается на пункте B . Такую ситуацию можно интерпретировать как обработку детали на двух станках. Например, сначала деталь обтачивается на токарном станке, а затем идет сверление детали на сверлильном станке. Вторая операция может начаться только по завершении первой.

Пусть имеется очередь из n таких заявок. Время обработки каждой детали на каждом из станков свое. Как организовать обработку всех деталей, чтобы суммарное время их обработки было минимальным?

Время обработки i -й детали (заявки) на станке (пункте) A обозначим как a_i , соответственно, время ее обработки на станке (пункте) B обозначим как b_i . Занесем данные в табличную форму (см. ниже).

№ детали	1	2	3	...	n
A	a_1	a_2	a_3	...	a_n
B	b_1	b_2	b_3	...	b_n

Диаграмму Ганта для «задачи двух станков» будем строить следующим образом: построим три горизонтальные оси времени. На оси A будем откладывать отрезки, пропорциональные времени обработки деталей на станке A , последовательно друг за другом в порядке их поступления на этот станок. Будем полагать, что станок работает непрерывно, т. е. завершив обработку одной детали, он немедленно приступает к обработке следующей. Над соответствующими отрезками будем ставить теперь номер заявки (детали). На оси B отмечаем момент поступления очередной детали на станок B и откладываем отрезок, пропорциональный времени обработки этой детали на станке B . Над отрезком ставим номер данной детали. На оси $T_{\text{ож}}$ отмечаем моменты начала и окончания обработки каждой детали на каждом станке в режиме текущего времени и выделяем пропорциональными отрезками время ожидания станком B возможности начать обработку очередной детали, т. е. время простоя станка B . Над таким отрезком ставим время t_i очередного ожидания (простоя). Деталь поступает на станок B только по окончании ее обработки на станке A , поэтому момент ее поступления на станок B должен быть согласован с моментом окончания ее обработки на станке A . Возможны такие варианты: 1) к моменту окончания обработки k -й детали на станке A станок B уже закончил обработку предыдущей детали и ожидает возможности приступить к обработке k -й детали. В этом случае возникает время простоя станка B ; такой вариант всегда возникает при обработке первой детали: пока она обрабатывается станком A , станок B ждет окончания этой обработки; 2) возможен вариант, когда одновременно станок A заканчивает обработку k -й детали, станок B обработку предшествующей детали, и в этот же момент станок B приступает к обработке k -й детали, т. е. его простой равен нулю; 3) k -я деталь закончила обработку на станке A , а станок B еще продолжает обрабатывать предыдущие детали. В этом

случае k -я деталь ждет возможности поступить на обработку станком B и, как только он завершит обслуживание предыдущей ($k - 1$ -й) детали, k -я деталь немедленно поступает на станок B . Простой станка B и в этом случае равен нулю.

Возможный вид диаграмм Ганта в этих трех случаях приведен ниже на рис. 4–6.

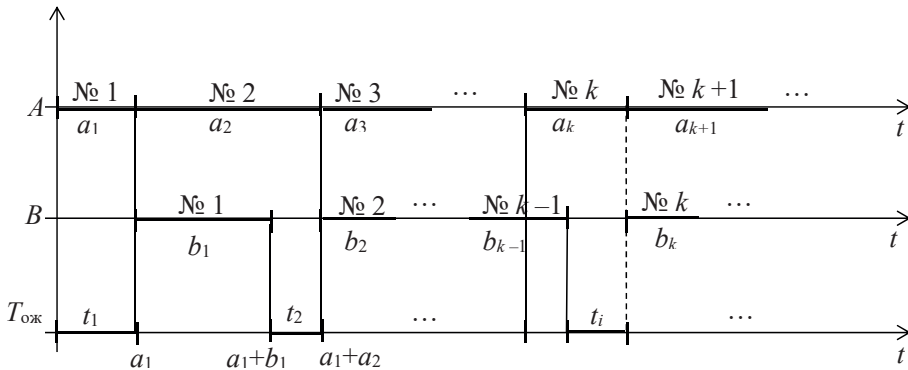


Рис. 4

На рис. 4 изображен случай, когда станок B ожидает окончания обработки станком A деталей № 1, № 2 и № k .

Время ожидания $t_1 = a_1$, т. е. равно времени обработки детали № 1 станком A .

Время ожидания $t_2 = (a_1 + a_2) - (a_1 + b_1) = (a_1 + a_2) - (b_1 + t_1) = a_2 - b_1$.

Время ожидания $t_i = (a_1 + \dots + a_k) - (b_1 + \dots + b_{k-1} + t_1 + \dots + t_{i-1})$.

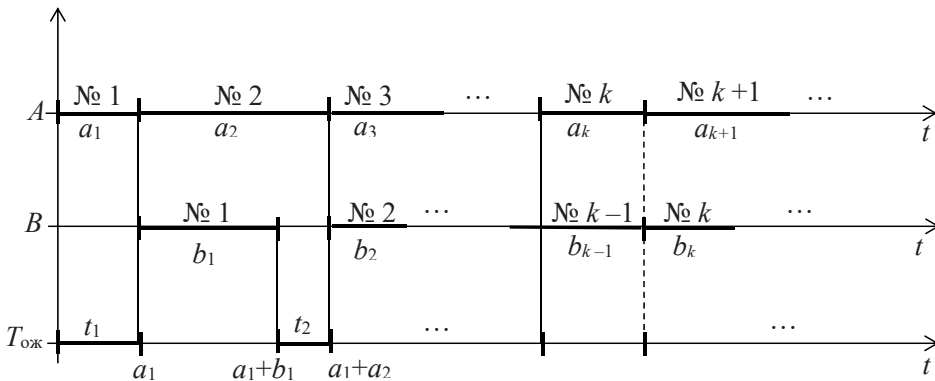


Рис. 5

На рис. 5 приведен случай, когда станок B заканчивает обработку детали (№ $k - 1$) в момент окончания обработки детали № k станком A и может немедленно начать обрабатывать следующую деталь.

Простоя нет. Отсутствует t_i .

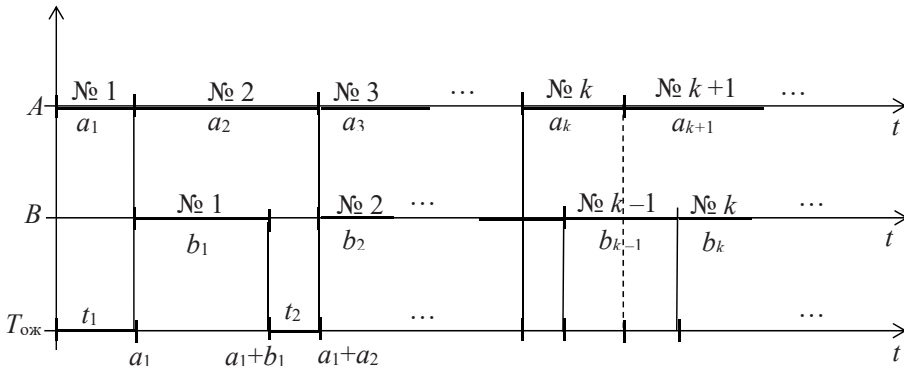


Рис. 6

На рис. 6 изображен случай, когда станок B продолжает обрабатывать деталь (№ $k - 1$), в то время как станок A уже закончил обработку детали № k . Эта деталь ждет момента окончания работы станка B над деталью № $k - 1$ и, как только это случится, немедленно поступает на станок B для дальнейшей обработки. Простоя станка B нет. Ожидание t_i отсутствует.

Суммарное время обработки всех деталей на станке A есть величина постоянная $T_A = \sum_{k=1}^n a_k$. Суммарное время $T_B = \sum_{k=1}^n b_k$, затраченное

на обработку всех деталей станком B (без учета его простоев), тоже постоянно. Все детали будут обработаны полностью тогда, когда будет закончена обработка последней детали станком B . Общее время обработки всех деталей на двух станках очевидно равно сумме времени работы станка B и времени его суммарного простоя, т. е. $T_{\text{обр}} = T_B + \sum t_i = \sum b_k + \sum t_i$. Суммарное время простоя станка B зависит от порядка подачи деталей на станок A ; меняя порядок очереди можно это время уменьшить и, следовательно, уменьшить общее время обработки всех деталей. Таким образом, задача минимизации общего времени обработки деталей сводится к минимизации суммарного времени простоя станка B :

$$\min T_{\text{обр}} \Leftrightarrow \min \sum t_i.$$

Общее число вариантов очереди из n заявок равно $n!$ — числу перестановок из n элементов. Перебор такого количества вариантов затруднителен.

Задача двух станков, т. е. задача минимизации общего времени обработки заявок (деталей) на двух пунктах последовательного обслуживания (станках), решается с помощью *алгоритма Джонсона*.

Алгоритм заключается в следующем: рассматриваем таблицу с исходными данными, где в строку A занесены a_i , а в строку B , соответственно, занесены b_j :

a_i — время обработки i -й детали на станке A , $i = 1, \dots, n$;

b_j — время обработки j -й детали на станке B , $j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим алгоритм подробнее.

Среди всех a_i и b_j выбирается наименьшее число $m = \min \{a_i, b_j\}$.

1. Если m находится в строке A , т. е. $m = a_k$, то k -я деталь обрабатывается первой:

$m = a_k \Rightarrow$ деталь № k обслуживается первой.

Если m находится в строке B , т. е. $m = b_k$, то k -я деталь обрабатывается последней:

$m = b_k \Rightarrow$ деталь № k обрабатывается последней.

2. Деталь № k вычеркивается из списка, и тот же алгоритм применяется к оставшимся деталям. Алгоритм повторяется до тех пор, пока не будут вычеркнуты все детали.

В результате получаем оптимальную последовательность обработки деталей.

Пример 1. Имеется 5 деталей. Время их обработки на станках A и B приведено ниже.

№ детали	1	2	3	4	5
A	15	16	11	12	9
B	10	17	10	13	6

Воспользуемся алгоритмом Джонсона:

1. $\min \{a_i, b_j\} = \min \{15, 16, 11, 12, 9; 10, 17, 10, 13, 6\} = 6 = b_5 \Rightarrow$ деталь № 5 обрабатывается последней. Вычеркиваем деталь № 5 из списка (см. ниже).

№ детали	1	2	3	4
<i>A</i>	15	16	11	12
<i>B</i>	10	17	10	13

2. $\min \{a_i; b_j | i, j \neq 5\} = \min \{15, 16, 11, 12; 10, 17, 10, 13\} = 10 = b_1 = b_3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ деталь № 1 (или № 3) обрабатывается предпоследней (два варианта).

Выбираем любую из этих деталей, например деталь № 1. Ее будем обрабатывать предпоследней (можно заменить ее деталью № 3). Вычеркиваем выбранную деталь из списка.

3. Оставшаяся из этих двух деталей (№ 3 или № 1) обрабатывается в этом случае непосредственно перед выбранной на предыдущем шаге, т. к. минимальным элементом в таблице останется соответствующее b_i . Вычеркиваем выбранную деталь. В итоге детали № 1 и № 3 из получившегося списка вычеркнуты (см. ниже).

№ детали	2	4
<i>A</i>	16	12
<i>B</i>	17	13

4. $\min \{a_i; b_j | i, j \neq 1, 3, 5\} = \min \{16, 12; 17, 13\} = 12 = a_4 \Rightarrow$ деталь № 4 обрабатывается первой. Вычеркиваем деталь № 4 из списка (см. ниже).

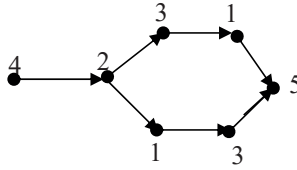
№ детали	2
<i>A</i>	16
<i>B</i>	17

5. В списке осталась одна деталь. Ставим ее на оставшееся место в очереди. У нас в очереди из пяти мест заняты первое, пятое, четвертое и третье. Следовательно, деталь № 2 будет обрабатываться второй.

6. Оптимальный порядок подачи деталей представлен ниже.

$N_{\text{опт}}$	4	2	3 (1)	1 (3)	5
------------------	---	---	-------	-------	---

Изобразим рассмотренные варианты порядка в виде графа (см. ниже).



Также сведем полученные данные ниже для построения диаграммы Ганта.

№ детали	1	2	3	4	5
<i>A</i>	15	16	11	12	9
<i>B</i>	10	17	10	13	6
$N_{\text{опт}}$	4	2	3(1)	1(3)	5

Диаграмма Ганта для исходной последовательности заявок (рис. 7).

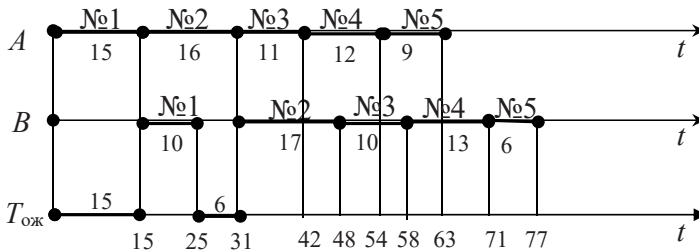


Рис. 7

$$T_A = \sum_{j=1}^n a_j = 63, T_B = \sum_{j=1}^n b_j = 56, T_{\text{ож}} = \sum_{i=1}^n t_i = 15 + 6 = 21.$$

$$T_{\text{обп}} = T_B + T_{\text{ож}} = \sum_{j=1}^n b_j + \sum_{i=1}^n t_i = (10 + 17 + 10 + 13 + 6) + (15 + 6) = 56 + 21 = 77.$$

Диаграмма Ганта для оптимальной последовательности заявок (рис. 8).

$$T_A = \sum_{j=1}^n a_j = 63, T_B = \sum_{j=1}^n b_j = 56, T_{\text{ож}} = \sum_{i=1}^n t_i = 12 + 3 = 15, T_{\text{обп}} = T_B + T_{\text{ож}},$$

$$T_{\text{обп}} = \sum_{j=1}^n b_j + \sum_{i=1}^n t_i = (13 + 17 + 10 + 10 + 6) + (12 + 3) = 56 + 15 = 71.$$

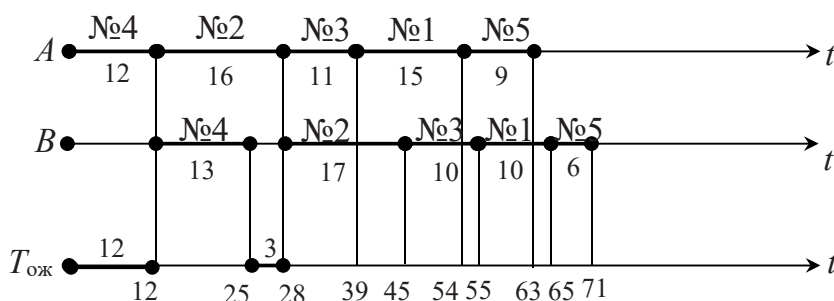


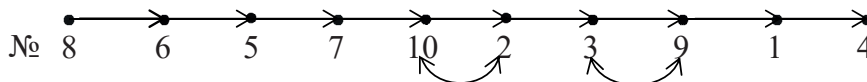
Рис. 8

Выигрыш времени оптимального варианта обработки заявок по сравнению с исходным порядком (в соответствии с их номерами) $\Delta T_{\text{обр}} = 77 - 71 = 6$.

Пример 2. Решить задачу двух станков.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	6	8	5	3	4	2	7	1	6	8
B	2	4	3	1	6	7	5	2	3	4

Применяя алгоритм Джонсона, найдем оптимальный план работ. Оптимальная последовательность обработки заявок:



В оптимальной последовательности ($N_{\text{опт}}$) можно поменять местами заявки № 2 и № 10, а также заявки № 3 и № 9. Оптимальность от этого не нарушится (см. ниже).

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	6	8	5	3	4	2	7	1	6	8
B	2	4	3	1	6	7	5	2	3	4
$N_{\text{опт}}$	8	6	5	7	10(2)	2(10)	3(9)	9(3)	1	4

Диаграмма Ганта для начальной последовательности (рис. 9).

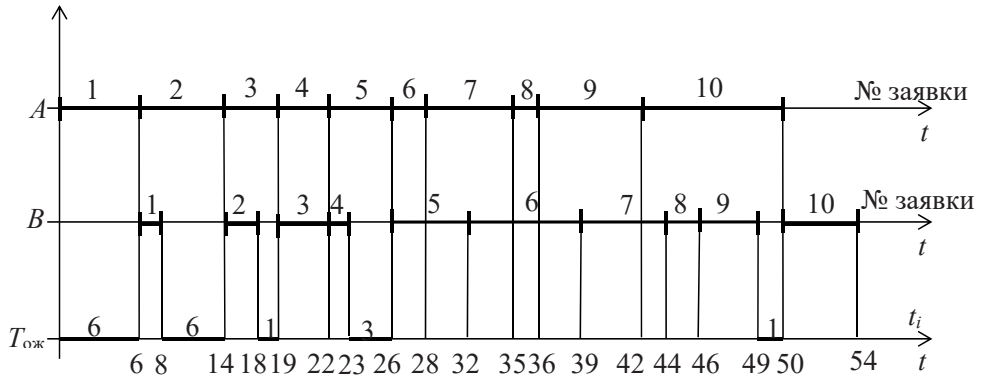


Рис. 9

$$T_A = 50, T_B = 37, T_{ож} = 17, T_{обр} = 37 + 17 = 54.$$

Диаграмма Ганта для оптимальной последовательности (рис. 10).

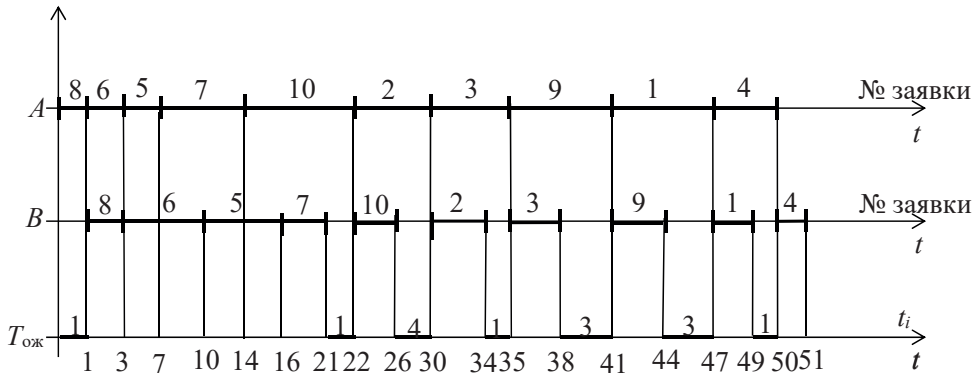


Рис. 10

$$T_A = 50, T_B = 37, T_{ож} = 14, T_{обр} = 37 + 14 = 51.$$

Выигрыш времени $\Delta T_{обр} = 54 - 51 = 17 - 14 = 3$.

Доказательство алгоритма Джонсона.

Доказательство проведем для случая $n = 2$, т. е. для двух заявок (данные представлены ниже в табл. форме).

$N_{дет}$	1	2
A	a_1	a_2
B	b_1	b_2

Рассмотрим обработку деталей в порядке следования:
Сначала обрабатываем заявку № 1, затем заявку № 2.
Диаграмма Ганта в этом случае может иметь такой вид (рис. 11),

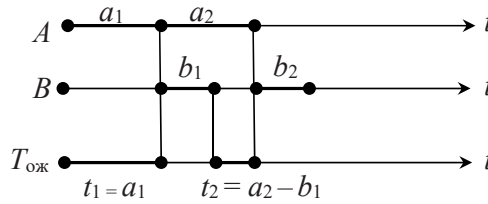


Рис. 11

или такой вид (рис. 12).

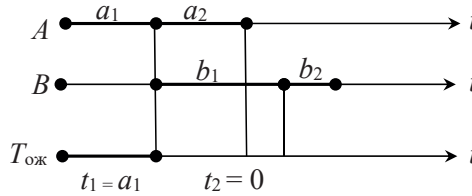


Рис. 12

Здесь $t_1 = a_1$, но для t_2 есть два варианта:

$$t_2 = \begin{cases} a_2 - b_1, & \text{если } b_1 < a_2 \\ 0, & \text{если } b_1 \geq a_2 \end{cases} \Rightarrow t_2 = \max \{a_2 - b_1, 0\}.$$

Простой станка B при порядке следования: деталь № 1 $\longrightarrow$ деталь № 2:

$$P_{12} = \sum_{i=1}^2 t_i = t_1 + t_2 = a_1 + \max \{a_2 - b_1, 0\} = \max \{a_1 + a_2 - b_1, a_1\}.$$

Внесли слагаемое a_1 под знак $\max$ (добавили его ко всем элементам списка), от этого значение максимального элемента не изменилось.

Изменим порядок следования: № 2 $\longrightarrow$ № 1.

Диаграмма Ганта в этом варианте имеет вид (рис. 13).

Здесь $t_1 = a_2$ и снова два варианта для t_2 :

$$t_2 = \begin{cases} a_1 - b_2, & \text{если } b_2 < a_1 \\ 0, & \text{если } b_2 \geq a_1 \end{cases} \Rightarrow t_2 = \max \{a_1 - b_2, 0\}.$$

Простой станка B при порядке следования: деталь № 2 $\longrightarrow$ деталь № 1:

$$P_{21} = \sum_{i=1}^2 t_i = t_1 + t_2 = a_2 + \max \{a_1 - b_2, 0\} = \max \{a_1 + a_2 - b_2, a_2\}.$$

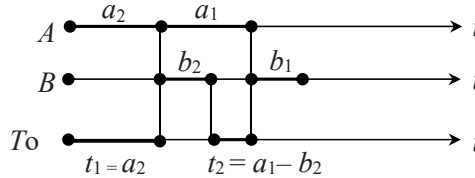


Рис. 13

Внесли, как и ранее, слагаемое a_2 под знак $\max$, значение максимального элемента не изменилось.

Введем величины $\tilde{P}_{12}$ и $\tilde{P}_{21}$:

$$\tilde{P}_{12} = P_{12} - a_1 - a_2 = \max \{-b_1, -a_2\} = -\min \{b_1, a_2\};$$

$$\tilde{P}_{21} = P_{21} - a_1 - a_2 = \max \{-b_2, -a_1\} = -\min \{b_2, a_1\}.$$

Вычитаем из P_{12} и P_{21} величину $(a_1 + a_2)$, вносим ее под знак $\max$, что не меняет величину максимума (т. к. вычитаем эту величину из каждого элемента списка), и выносим общий для всех элементов списка знак минус за знак $\max$, который при этой операции превращается в знак $\min$.

$\tilde{P}_{12} < \tilde{P}_{21} \Leftrightarrow P_{12} < P_{21}$ (т. к. для получения $\tilde{P}_{12}$ и $\tilde{P}_{21}$ мы вычитаем из P_{12} и P_{21} одну и ту же величину).

Если $\tilde{P}_{12} < \tilde{P}_{21}$, то менять порядок следования деталей не нужно, потому что в этом случае $P_{12} < P_{21}$, т. е. простой станка B меньше, когда сначала обрабатывается деталь № 1, а затем деталь № 2. Рассмотрим условия, при которых выполняется или нарушается это неравенство: $\tilde{P}_{12} < \tilde{P}_{21} \Leftrightarrow \tilde{P}_{21} > \tilde{P}_{12} \Leftrightarrow -\min \{b_2, a_1\} > -\min \{b_1, a_2\} \Leftrightarrow \min \{b_2, a_1\} < \min \{b_1, a_2\}$.

Умножили обе части неравенства на (-1) , знак неравенства сменился на противоположный. Получили следующее соотношение:

$$P_{12} < P_{21} \Leftrightarrow \min \{b_2, a_1\} < \min \{b_1, a_2\}.$$

Исследуем возможные варианты, при которых неравенство сохраняется (порядок обработки деталей не нужно менять) и неравенство нарушается (порядок обработки деталей нужно изменить). Пусть:

1) $a_1 < a_2, b_1, b_2 \Rightarrow$ неравенство не нарушено $\Rightarrow$ порядок следования не меняется (№ 1 $\rightarrow$ № 2);

2) $a_2 < a_1, b_1, b_2 \Rightarrow$ неравенство нарушено, меняем порядок следования деталей (№ 2 $\longrightarrow$ № 1);

3) $b_1 < b_2, a_1, a_2 \Rightarrow$ неравенство нарушено, порядок следования деталей меняем (№ 2 $\longrightarrow$ № 1);

4) $b_2 < b_1, a_1, a_2 \Rightarrow$ неравенство справедливо, не меняем порядок обработки деталей (№ 1 $\longrightarrow$ № 2).

Вывод. Если минимум находится в первой строке (т. е. это a_1 или a_2), то обрабатывается первой соответствующая этому минимуму деталь.

Если минимум во второй строке (т. е. это b_1 или b_2), то последней обрабатывается соответствующая этому минимуму деталь.

Для $n = 2$ алгоритм Джонсона доказан.

Методом математической индукции доказательство обобщается на произвольное число n деталей.

Задачи для проработки теоретического материала

Задачи решаются на основе теории, приведенной в главе «СМО с фиксированной очередью».

Задача 1. Решить задачу минимизации суммарного штрафа (необходимые данные представлены ниже).

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_i	6	7	2	8	9	12	6	10	5
C_i	3	5	3	7	6	3	2	5	1

Задача 2. Решить задачу «директора» (одного станка). Необходимые данные представлены ниже.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_i	35	63	82	44	61	53	37	26	19

Задача 3. Решить задачу двух станков (необходимые данные представлены ниже).

№	1	2	3	4	5
<i>A</i>	21	14	12	24	18
<i>B</i>	9	13	8	35	27

Решения и ответы

Задача 1. Задача минимизации суммарного штрафа.

Находим для каждой заявки величину относительного штрафа C_i/T_i и оптимальный порядок обработки $N_{\text{опт}}$. Заносим все данные (для удобства построения диаграмм Ганта) в табличную форму (см. ниже).

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_i	6	7	2	8	9	12	6	10	5
C_i	3	5	3	7	6	3	2	5	1
C_i/T_i	1/2	5/7	3/2	7/8	2/3	1/4	1/3	1/2	1/5
$N_{\text{опт}}$	5	3	1	2	4	8	7	6	9

Ответ.

Оптимальная последовательность обработки заявок:

$3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1 \Leftarrow 8 \Rightarrow 7 \Rightarrow 6 \Rightarrow 9$.

Общее время обслуживания всех заявок: $T = 65$.

Суммарные штрафы и их разность:

$S = 806$, $S^o = 692$, $\Delta S = 114$.

Задача 2. Задача «директора» (одного станка).

Находим для каждой заявки время ожидания $T_{\text{ож}}$ и оптимальный порядок обработки $N_{\text{опт}}$. Расчеты (для удобства) проводим в табличной форме (см. ниже).

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
T_i	35	63	82	44	61	53	37	26	19	—
$T_{\text{ож}}$	0	35	98	180	224	285	338	375	401	1936
$N_{\text{опт}}$	3	8	9	5	7	6	4	2	1	—

Перестраиваем расчетную таблицу для оптимальной последовательности обработки заявок и находим $T_{ож}^o$:

$N_{опт}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
№	9	8	1	7	4	6	5	2	3	—
T_i^o	19	26	35	37	44	53	61	63	82	—
$T_{ож}^o$	0	19	45	80	117	161	214	275	338	1249

Ответ. $T = 1936$; $T^o = 1249$; $\Delta T = 687$.

Задача 3. Задача двух станков.

С помощью алгоритма Джонсона находим оптимальную последовательность обработки заявок $N_{опт}$ и отражаем полученные результаты в табличной форме (см. ниже). Используя диаграммы Ганта, найдем нужные параметры.

№	1	2	3	4	5	Σ
A	21	14	12	24	18	89
B	9	13	8	35	27	92
$N_{опт}$	4	3	5	2	1	—

Ответ.

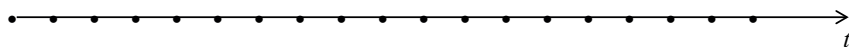
$5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$; $T_A = 89$; $T_B = 92$; $T_{ож} = 41$; $T_{об} = 133$.

$T_{ож}^o = 18$; $T_{об}^o = 110$; $\Delta T = 23$.

3. Поток событий

Поток событий — это последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то моменты времени. Эти моменты времени могут быть фиксированными, а могут быть случайными.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через определенные фиксированные промежутки времени (в частности, равные). Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха, движущегося с постоянной скоростью. Графическая визуализация регулярного потока выглядит следующим образом:

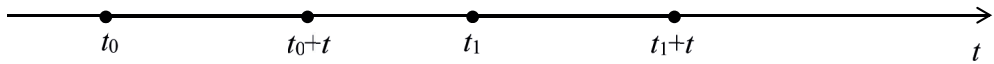


Поток событий называется *случайным*, если появления событий происходят в случайные моменты времени. Например, поток вызовов на АТС, поток покупателей в супермаркете, поток отказов ЭВМ и т. п. Графическая визуализация случайного потока выглядит следующим образом:



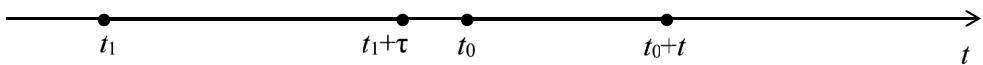
Поток характеризуется интенсивностью λ — частотой появления событий, т. е. средним числом событий, происходящих в единицу времени.

Поток называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени (не меняются с течением времени). В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$. Для стационарного потока вероятность появления определенного числа событий на промежутке времени продолжительностью t не зависит от момента времени t_0 , с которого начинается отсчет этого промежутка. Эта вероятность зависит только от длительности t промежутка $(t_0, t_0 + t)$, но не от момента времени t_0 , т. е. она не зависит от расположения этого промежутка на числовой оси. Неважно, с какого момента времени мы начинаем исследование стационарного потока — все его характеристики будут теми же самыми. Проиллюстрировать графически сказанное выше можно следующим образом:



Вероятности появления на каждом из изображенных отрезков определенного числа событий (например, трех) стационарного потока будут равны, т. к. длины этих отрезков одинаковы, независимо от расположения точек t_0 и t_1 — начальных точек этих отрезков, изображающих равные промежутки времени.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если то, что происходило до момента t_0 , никак не влияет на характеристики потока после момента t_0 для любого значения t_0 . Иначе говоря, для любых двух непересекающихся промежутков времени число событий, попадающих на второй из них, никак не зависит от типа и числа событий, попавших на первый из них. Это число зависит только от интенсивности потока λ и длительности промежутка t . Неважно, происходили или нет события до момента t_0 (момента начала отсчета промежутка t), когда они происходили и сколько их было. Графическая иллюстрация сказанного выглядит следующим образом:



Число случайных событий потока без последействия, попадающих на второй отрезок (промежуток времени), не зависит от того, сколько и в какие точки первого отрезка попали события этого потока.

Поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последствия. Поток покупателей, отходящих с покупками от кассы, уже имеет последствие, т. к. интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время обслуживания каждого из них. Обслуживание покупателя задерживает момент подхода следующего покупателя к кассе. Поток прихода клиентов в парикмахерскую — поток без последствия. Клиент может прийти в любое (рабочее) время и то, сколько человек и когда пришли до него, не влияет на время его прихода. Поток выхода обслуженных клиентов из парикмахерской — поток с последствием, на время выхода влияет количество и время обслуживания ранее пришедших клиентов.

Регулярный поток обладает последствием, в нем жестко фиксировано время следования одного события за другим, момент появления следующего события зависит от момента появления предыдущего. Поток прибытия поездов на станцию метро — это регулярный поток.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность появления на весьма малом (элементарном) участке времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события. Другими словами, поток событий ординарен, если события в нем появляются поодиночке, а не группами. Например, поток поездов, подходящих к станции метро, ординарен, а поток людей, выходящих из такого поезда, не ординарен.

Ординарный поток без последствия называется пуассоновским потоком. Стационарный пуассоновский поток называется простейшим потоком. Таким образом, поток событий является простейшим, если он одновременно:

- стационарен;
- не имеет последствия;
- ординарен.

Регулярный поток не является простейшим потоком.

Имеет место утверждение:

При наложении (суперпозиции) достаточно большого числа n независимых, стационарных и ординарных потоков, сравнимых между собой по интенсивностям λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), получается близкий к простейшему поток с интенсивностью λ , равной сумме интенсивностей входящих потоков:

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Вероятностные характеристики простейшего потока

Рассмотрим случайный поток, у которого число m событий, попадающих на произвольный промежуток времени t , распределено по закону Пуассона (m — случайная величина):

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}; \quad \lambda > 0.$$

Поток, определяемый этой формулой, называют *пуассоновским*.

Математическое ожидание случайной величины m для данного вида закона Пуассона равно

$$M(m) = \lambda t.$$

Это среднее число случайных событий потока, происходящих в течение времени t (попавших на промежуток времени, длительностью t).

Для закона Пуассона $M(\xi) = D(\xi)$, следовательно, дисперсия числа m также равна

$$\sigma^2(m) = D(m) = \lambda t.$$

Найдем вероятность того, что за время t не произойдет ни одного события потока (на участок длиной t не попадет ни одно событие):

$$P_t(0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.$$

Пусть T — интервал времени между двумя произвольными соседними событиями потока (T — случайная величина).

Вероятность того, что на участке времени продолжительности t не появится ни одного события потока (т. е. T будет не меньше t) равна

$$P(T \geq t) = P_t(0) = e^{-\lambda t}.$$

Это значит, что функция распределения случайной величины T равна

$$F_T(t) = P(T < t) = 1 - P(T \geq t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

т. е. случайная величина T имеет показательное (экспоненциальное) распределение. Найдем плотность распределения вероятности случайной величины T :

$$p_T(t) = F'_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины T (для показательного распределения они равны) обратны по величине интенсивности потока:

$$M(T) = \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

Важнейшее свойство показательного распределения (присущее только ему) состоит в следующем: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время τ , то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка ($T - \tau$): он будет таким же, как и закон распределения всего промежутка T . Другими словами, для интервала времени T между двумя последовательными соседними событиями потока, имеющего показательное распределение, любые сведения о том, сколько времени прошло от начала этого интервала, не влияют на закон распределения оставшейся его части.

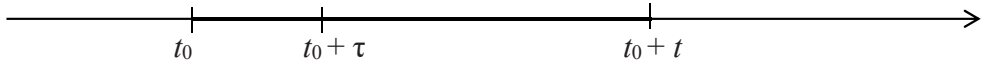
Покажем, что поток, определенный формулой Пуассона,

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0,$$

является простейшим потоком, если его интенсивность постоянна, т. е. не зависит от времени.

Отсутствие последействия сразу вытекает из формулы Пуассона. Появление событий на произвольном промежутке времени длительностью t никак не связано с тем, что происходило до начала этого промежутка, какие события и в какие моменты времени там происходили. Число событий и вероятность их появления на интервале $(t_0, t_0 + t)$ полностью определяются формулой Пуассона, которая не содержит никакой информации о том, что происходило до момента времени t_0 , т. е. предыстория потока не влияет на его вероятностные характеристики. Такой же вывод можно сделать из указанного выше свойства экспоненциального распределения случайной величины T — промежутка времени между двумя произвольными соседними событиями потока. Пусть $A = (T \geq \tau)$ — событие, заключающееся в том, что промежуток времени между соседними событиями потока не меньше τ , т. е. в течение периода длительностью τ не произойдет ни одно событие потока; $B = (T \geq t - \tau)$ — событие, свидетельствующее о том, что в течение времени $(t - \tau)$ не будет ни одного события потока. Можно расположить эти интервалы непосредственно друг за другом так, что

конец первого интервала совпадет с началом второго. Тогда событие $AB = (T \geq t)$ — это то, что оба события имели место (произведение событий), т. е. на протяжении всего периода t не произошло ни одно событие потока (см. ниже).



Найдем вероятности событий A , B и AB :

$$P(A) = P(T \geq \tau) = e^{-\lambda\tau}; \quad P(B) = P(T \geq t - \tau) = e^{-\lambda(t-\tau)};$$

$$P(AB) = P(T \geq t) = e^{-\lambda t}.$$

Рассмотрим произведение вероятностей:

$$P(A)P(B) = e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda(t-\tau)} = e^{-\lambda\tau - \lambda t + \lambda\tau} = e^{-\lambda t}.$$

Сравним с $P(AB)$. Имеем $P(AB) = P(A)P(B)$. Отсюда следует $P(B|A) = P(B)$.

Это значит, что события A и B независимы, т. е. величина интервала между событиями на втором участке не зависит от того, появлялись или нет и в каком количестве события на первом участке. Другими словами, число случайных событий потока на первом участке никак не влияет на число событий потока на втором участке. Следовательно, рассматриваемый поток — поток без последствия.

Докажем ординарность потока, определенного формулой Пуассона:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0.$$

Как было показано ранее, из этой формулы вытекает, что

$$F_T(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad P_t(m=0) = e^{-\lambda t}.$$

Вероятность попадания на элементарный отрезок времени Δt хотя бы одного события пуассоновского потока с интенсивностью λ равна

$$P_{\Delta t}(m \geq 1) = P_{\Delta t}(T < \Delta t) = P_{\Delta t}(m \neq 0) = 1 - P_{\Delta t}(m = 0) = 1 - e^{-\lambda \Delta t}.$$

Заменим функцию $e^{-\lambda \Delta t}$ ее разложением в степенной ряд:

$$e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + \frac{\lambda^2 (\Delta t)^2}{2} - \frac{\lambda^3 (\Delta t)^3}{3!} + \dots$$

Тогда с точностью до Δt получим

$$P_{\Delta t}(m \geq 1) = P_{\Delta t}(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \left(1 - \lambda \Delta t + \frac{\lambda^2 (\Delta t)^2}{2} - \dots\right) \approx \lambda \Delta t.$$

Вероятность попадания на элементарный отрезок времени Δt только одного события простейшего потока равна (по формуле Пуассона)

$$P_{\Delta t}(m = 1) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}.$$

Вероятность попадания на элементарный отрезок времени Δt более одного события простейшего потока равна

$$\begin{aligned} P_{\Delta t}(m > 1) &= P_{\Delta t}(m \geq 1) - P_{\Delta t}(m = 1) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} - \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} = \\ &= 1 - \left(1 - \lambda \Delta t + \frac{\lambda^2 (\Delta t)^2}{2} - \frac{\lambda^3 (\Delta t)^3}{3!} + \dots\right) - \lambda \Delta t (1 - \lambda \Delta t + \\ &+ \frac{\lambda^2 (\Delta t)^2}{2} - \frac{\lambda^3 (\Delta t)^3}{3!} + \dots) = \\ &= \lambda \Delta t - \lambda \Delta t - \frac{\lambda^2 (\Delta t)^2}{2} + \lambda^2 (\Delta t)^2 + \frac{\lambda^3 (\Delta t)^3}{3!} - \frac{\lambda^3 (\Delta t)^3}{2} - \dots = \frac{\lambda^2 (\Delta t)^2}{2} - \frac{\lambda^3 (\Delta t)^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

Найдем отношение вероятности того, что на отрезок Δt попадет более одного события к вероятности того, что на этот отрезок попадет только одно событие потока:

$$\frac{P_{\Delta t}(m > 1)}{P_{\Delta t}(m = 1)} = \frac{\frac{\lambda^2 (\Delta t)^2}{2} - \frac{\lambda^3 (\Delta t)^3}{3} + \dots}{\lambda \Delta t (1 - \lambda \Delta t + \dots)} = \frac{\frac{\lambda (\Delta t)}{2} - \frac{\lambda^2 (\Delta t)^2}{3} + \dots}{1 - \lambda \Delta t + \dots} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0.$$

Устремляя Δt к нулю, видим, что это отношение тоже стремится к нулю.

Итак, $\frac{P_{\Delta t}(m > 1)}{P_{\Delta t}(m = 1)} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$P_{\Delta t}(m > 1) = o(P_{\Delta t}(m = 1)).$$

Это означает, что вероятность $P_{\Delta t}(m > 1)$ пренебрежимо мала по сравнению с $P_{\Delta t}(m = 1)$. Таким образом, это ординарный поток.

Следовательно, *пуассоновский поток* — это ординарный поток без последствия.

Если пуассоновский поток стационарен, то это простейший поток. Осталось доказать стационарность пуассоновского потока при постоянной его интенсивности.

Действительно, в соответствии с формулой Пуассона

$$P_i(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

если $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, вероятность появления определенного числа m событий на промежутке времени продолжительностью t не зависит от момента времени t_0 , с которого начинается отсчет этого промежутка. В формуле t_0 отсутствует. Вероятность однозначно зависит только от длительности (t) рассматриваемого промежутка и постоянной интенсивности ($\lambda > 0$). С какого момента времени начинается рассмотрение процесса, не имеет никакого значения. Расположение временного промежутка на числовой оси не играет никакой роли. Все это означает стационарность процесса.

Таким образом, мы показали, что поток, определяемый формулой Пуассона, если его интенсивность постоянна (не зависит от времени), обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности, т. е. согласно определению, является простейшим потоком.

Случайные процессы

Случайным (вероятностным или стохастическим) называется процесс изменения во времени состояния какой-либо системы, происходящий в соответствии с вероятностными закономерностями, т. е. если эти изменения происходят в случайном порядке в случайные моменты времени.

Процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если его возможные состояния ($S_1, S_2, S_3, \dots$) можно заранее перечислить, а переход системы из одного состояния в другое происходит мгновенно (скачком).

Процесс называется *процессом с непрерывным временем*, если моменты возможных переходов системы из одного состояния в другое не фиксированы заранее, а случайны.

Случайный процесс называется *марковским процессом* (или случайным процессом без последействия), если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент времени t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Процесс работы СМО с простейшим потоком заявок представляет собой марковский случайный процесс с дискретными состояниями

и непрерывным временем. Это означает, что состояние СМО меняется скачком в случайные моменты времени, в моменты появления каких-то событий (например, прихода новой заявки, окончания обслуживания заявки и т. п.).

Пример.

Система состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего начинается немедленный ремонт этого узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время.

Состояния системы S обозначим S_0, S_1, S_2, S_3 .

Состояние S_0 — оба узла исправны; S_1 — первый узел вышел из строя, второй исправен; S_2 — второй узел вышел из строя, первый исправен; S_3 — оба узла неисправны. Поток выхода узлов из строя будем считать простейшим, поток возвращений узлов в строй — тоже. В силу ординарности простейших потоков переход системы из состояния S_0 (оба узла исправны) в состояние S_3 (оба узла неисправны) и обратно практически невозможен (появление двух событий в один и тот же момент времени). Через λ_{ij} обозначим интенсивности перехода системы из состояния S_i в состояние S_j .

Построим размеченный граф состояний системы S (рис. 14).

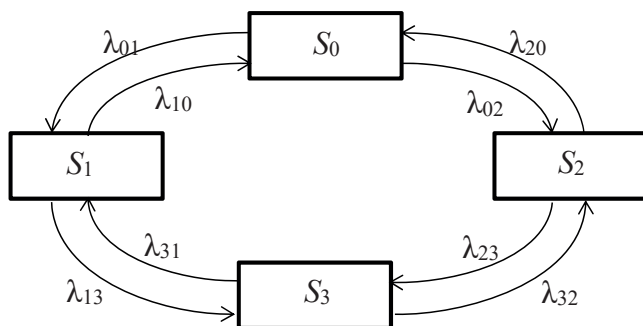


Рис. 14

Вероятность i -го состояния системы, т. е. вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i , обозначим $p_i(t)$.

Для любого момента времени t выполняется условие

$$\sum_{i=0}^3 p_i(t) = 1,$$

которое означает, что сумма вероятностей всех возможных в момент времени t состояний системы S равна единице, т. е. рассмотрены все возможные варианты состояний системы. Будем называть это условие условием нормировки.

Уравнения Колмогорова

Рассмотренный пример дает достаточно общую (и для большего числа состояний) схему СМО, работа которой может быть охарактеризована как марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Вероятность того, что за время Δt система перейдет из состояния S_i в состояние S_j , как было показано ранее, приближенно (с точностью до Δt) равна произведению интенсивности перехода на длительность промежутка времени Δt :

$$P_{\Delta t}(S_i \rightarrow S_j) = P_{\Delta t}(m \geq 1) \approx \lambda_{ij} \Delta t.$$

Она равна вероятности того, что за время Δt произойдет хотя бы одно событие такого перехода.

Построим математическую модель работы таких систем.

Для рассмотренного примера найдем вероятность того, что система в момент $t + \Delta t$ будет находиться в состоянии S_0 . Эта вероятность есть $p_0(t + \Delta t)$. Она равна сумме вероятностей двух несовместных ситуаций:

1) система в момент времени t находилась в состоянии S_0 и за время Δt не вышла из этого состояния. Вероятность перехода в другое состояние зависит только от интенсивности такого перехода и не зависит от самого состояния, поэтому вероятность такой ситуации равна произведению вероятностей независимых событий. Вероятность этого равна

$$p_0(t)(1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t),$$

где $p_0(t)$ — вероятность пребывания системы в момент времени t в состоянии S_0 , а $(\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t$ — вероятность того, что система из состояния S_0 за время Δt перейдет в состояние S_1 или S_2 , и, соответственно, $(1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t)$ — вероятность противоположного события, означающего, что система осталась в состоянии S_0 ;

2) система находилась в состояниях S_1 или S_2 и за время Δt перешла в состояние S_0 . Эта вероятность равна

$$p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + p_2(t)\lambda_{20}\Delta t.$$

Таким образом,

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t) + p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + p_2(t)\lambda_{20}\Delta t.$$

Раскроем скобки, перенесем $p_0(t)$ в левую часть равенства и разделим обе части равенства на $\Delta t > 0$.

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = p_1(t)\lambda_{10} + p_2(t)\lambda_{20} - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0(t).$$

Перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\dot{p}_0(t) = \lambda_{10}p_1(t) + \lambda_{20}p_2(t) - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0(t).$$

Просматривая остальные состояния системы и рассуждая каждый раз подобным образом, в итоге мы получим систему дифференциальных уравнений, описывающих работу указанной СМО. Такие уравнения называют уравнениями Колмогорова.

$$\begin{cases} \dot{p}_0(t) = \lambda_{10}p_1(t) + \lambda_{20}p_2(t) - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0(t), \\ \dot{p}_1(t) = \lambda_{01}p_0(t) + \lambda_{31}p_3(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1(t), \\ \dot{p}_2(t) = \lambda_{02}p_0(t) + \lambda_{32}p_3(t) - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2(t), \\ \dot{p}_3(t) = \lambda_{13}p_1(t) + \lambda_{23}p_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3(t). \end{cases}$$

Аналогично составляется система уравнений Колмогорова при любом числе n возможных состояний СМО.

В полученной системе независимых уравнений на единицу меньше числа имеющихся состояний СМО, т.е. общего числа возможных уравнений, т.к. если мы определим вероятности $(n - 1)$ состояния СМО, то вероятность оставшегося состояния однозначно определится из условия равенства суммы всех вероятностей единице. Поэтому для поиска решения такой системы нужно одно из уравнений исключить, добавив вместо него условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i(t) = 1.$$

Систему дифференциальных уравнений естественно решать при начальных условиях: $p_0(0) = 1$, $p_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, следовательно, при условии, что в начальный момент времени система находилась в состоянии S_0 .

Особый интерес представляет исследование таких систем в условиях стационарного режима работы, т.е. в тех случаях, когда переход-

ный период приспособления системы к начавшемуся потоку событий уже прошел и система вышла на уровень стабильного устойчивого режима работы, не меняющегося с течением времени. В этом режиме вероятности состояний системы перестают зависеть от времени. Мы можем считать, что такой режим неизбежно установится, если система изначально проработает достаточно продолжительное время, т. е. при $t \rightarrow \infty$. Назовем такой режим *предельным стационарным режимом*. Значения $p_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$ называют *предельными (или финальными) вероятностями состояний*.

Доказана теорема существования предельных вероятностей:

если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.

Примем эту теорему без доказательства.

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Поскольку предельные вероятности постоянны, то заменяя их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим работы.

Для рассмотренного примера такая система имеет вид:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2. \end{cases}$$

В каждом уравнении системы слева стоит предельная вероятность данного состояния $p_i = \text{const}$, умноженная на суммарную интенсивность потоков, выходящих из данного состояния, а справа — сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в данное состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Пример 1.

В рассмотренном случае (рис. 14) при заданных интенсивностях потоков отказов и ремонта узлов,

$$\lambda_{01} = 1, \lambda_{02} = 2, \lambda_{10} = 2, \lambda_{13} = 2, \lambda_{20} = 3, \lambda_{23} = 1, \lambda_{31} = 3, \lambda_{32} = 2,$$

найти предельные вероятности состояний системы.

Решение.

Составим систему линейных уравнений для предельного стационарного режима по четырем состояниям системы:

$$\begin{cases} (1+2)p_0 = 2p_1 + 3p_2, \\ (2+2)p_1 = p_0 + 3p_3, \\ (3+1)p_2 = 2p_0 + 2p_3, \\ (3+2)p_3 = 2p_1 + p_2. \end{cases}$$

В этой системе только три независимых уравнения. Нетрудно увидеть, что четвертое уравнение есть линейная комбинация первых трех уравнений:

$[4] = [1] + [2] + [3]$. Заменяем это уравнение условием нормировки:

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2, \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3, \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Приведем систему к нормальной форме:

$$\begin{cases} 3p_0 - 2p_1 - 3p_2 = 0, \\ -p_0 + 4p_1 - 3p_3 = 0, \\ -2p_0 + 4p_2 - 2p_3 = 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Найдем определитель системы:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & -6 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (5 \cdot 6 - 3 \cdot 2) = 5 \cdot (30 - 6) = 5 \cdot 24 = 120. \end{aligned}$$

Найдем определители для соответствующих переменных.

Для p_0 :

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 24 + 24 = 48;$$

Для p_1 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -18 + 36 + 6 = 24;$$

Для p_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-24 - 12 + 4) = 32;$$

Для p_3 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 24 - 8 = 16.$$

По формулам Крамера найдем вероятности состояний системы:

$$p_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{48}{120} = 0,4; p_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{24}{120} = 0,2;$$

$$p_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{32}{120} \approx 0,27; p_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{120} \approx 0,13.$$

Проверка.

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,4 + 0,2 + 0,27 + 0,13 = 1.$$

Таким образом, 40 % времени система находится в состоянии S_0 (оба узла исправны), 20 % времени — в состоянии S_1 (первый узел отказал, второй исправен), 27 % времени — в состоянии S_2 (второй узел отказал, первый работает) и 13 % времени — в состоянии S_3 (оба узла отказали).

Пример 2.

В условиях примера 1 найти средний чистый доход от эксплуатации в стационарном режиме системы S , если известно, что в единицу времени исправная работа первого и второго узлов приносит доход соответственно в 10 и 6 ден. ед., а их ремонт требует затрат соответственно в 4 и 2 ден. ед. Оценить экономическую эффективность имеющейся возможности уменьшения вдвое среднего времени ремонта каждого из двух узлов, если при этом придется вдвое увеличить затраты на ремонт каждого узла (в единицу времени).

Решение.

В среднем первый узел исправно работает долю времени, равную

$$T_1 = p_0 + p_2 = 0,4 + 0,27 = 0,67,$$

а второй узел — долю, равную

$$T_2 = p_0 + p_1 = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

Первый узел находится в ремонте в среднем долю времени, равную

$$t_1 = p_1 + p_3 = 0,2 + 0,13 = 0,33,$$

а второй узел —

$$t_2 = p_2 + p_3 = 0,27 + 0,13 = 0,4.$$

Средний чистый доход в этом случае равен

$$Д = 0,67 \cdot 10 + 0,6 \cdot 6 - 0,33 \cdot 4 - 0,4 \cdot 2 = 10,3 - 2,12 = 8,18 \text{ ден. ед.}$$

Уменьшение вдвое среднего времени ремонта каждого из узлов означает увеличение вдвое интенсивностей потока завершения ремонта (возвращения узла в строй), т. е. теперь

$$\lambda_{10} = 4, \lambda_{20} = 6, \lambda_{31} = 6, \lambda_{32} = 4.$$

Отметим новые интенсивности потоков на размеченном графе состояний системы (рис. 15).

Система уравнений стационарного режима получает вид:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3, \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

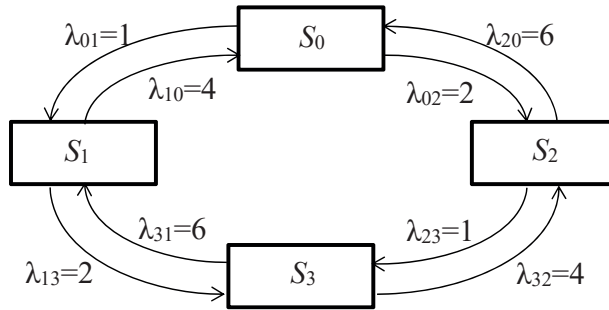


Рис. 15

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & -9 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 9 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & -9 & -3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 2 & 9 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 2 & 9 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 7 & 1 & -5 \\ 2 & 9 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & -5 \\ 2 & 11 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 8 \cdot (77 - 12) = 8 \cdot 65 = 520.$$

Найдем значения определителей для переменных в новых условиях.

Для p_0 :

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 24 + 24 = 48;$$

Для p_1 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -6 \\ -2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -72 + 24 + 126 = 78;$$

Для p_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -6 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 72 + 48 - 16 = 104;$$

Для p_3 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -6 \\ -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 126 - 72 - 28 = 26.$$

По формулам Крамера найдем новые вероятности состояний системы:

$$p_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{312}{520} = 0,6; p_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{520} = 0,15;$$

$$p_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{104}{520} = 0,2; p_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{26}{520} = 0,05.$$

Теперь в среднем первый узел исправно работает долю времени, равную

$$T_1 = p_0 + p_2 = 0,6 + 0,2 = 0,8,$$

а второй узел — долю, равную

$$T_2 = p_0 + p_1 = 0,6 + 0,15 = 0,75.$$

Первый узел находится в ремонте в среднем долю времени, равную

$$t_1 = p_1 + p_3 = 0,15 + 0,05 = 0,2,$$

а второй узел —

$$t_2 = p_2 + p_3 = 0,2 + 0,05 = 0,25.$$

Затраты на ремонт первого и второго узлов теперь равны 8 и 4 ден. ед. соответственно.

Средний чистый доход в единицу времени теперь равен

$$D_1 = 0,8 \cdot 10 + 0,75 \cdot 6 - 0,2 \cdot 8 - 0,25 \cdot 4 = 12,5 - 2,6 = 9,9 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, $D_1 = 9,9 > 8,18 = D$, т. е. $D_1 > D$ примерно на 20 %.

Вывод: экономически целесообразно реализовать указанное ускорение ремонта узлов.

Задачи для проработки теоретического материала¹

Задача 1. Построить граф состояний системы S , представляющей электрическую лампочку, которая в случайный момент времени может быть либо включена, либо выключена, либо выведена из строя.

Найти предельные вероятности состояний системы, если интенсивности потоков имеют следующие значения: $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 8$, $\lambda_{13} = \lambda_{23} = 1$.

¹ Условия задач в темах 3-7 взяты из [8].

Задача 2. Найти предельные вероятности состояний системы, используя данные, приведенные на рис. 16.

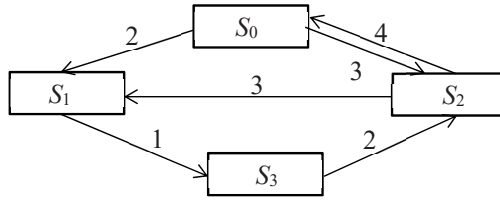


Рис. 16

Решения и ответы

Задача 1.

Состояния системы: S_1, S_2, S_3 .

S_1 — лампочка включена;

S_2 — лампочка выключена;

S_3 — лампочка выведена из строя.

$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 8, \lambda_{13} = \lambda_{23} = 1$.

Размеченный граф системы (рис. 17).

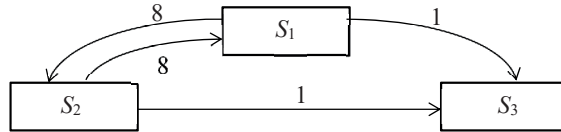


Рис. 17

Система уравнений:

$$\begin{cases} 9p_1 = 8p_2, \\ 9p_2 = 8p_1, \\ 0p_3 = p_1 + p_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ p_1 + p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1.$$

Ответ. $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$.

Задача 2.

Система уравнений:

$$\begin{cases} 5p_0 = 4p_2, \\ p_1 = 2p_0 + 3p_2, \\ 7p_2 = 3p_0 + 2p_3, \\ 2p_3 = p_1, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5p_0 - 4p_2 = 0, \\ -2p_0 + p_1 - 3p_2 = 0, \\ -p_1 + 2p_3 = 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -87.$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -46.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -23.$$

Ответ.

$$p_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{-8}{-87} \approx 0,09; \quad p_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-46}{-87} \approx 0,53;$$

$$p_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{-87} \approx 0,12; \quad p_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-23}{-87} \approx 0,26.$$

4. Процесс гибели и размножения

Рассмотрим в качестве объекта исследования биологическую популяцию. В ней происходят процессы гибели ее членов и рождения новых особей. Построим математическую модель изменения численности популяции.

Состояние популяции с некоторой минимальной численностью обозначим через S_0 . В процессе размножения численность популяции будет увеличиваться, в процессе гибели — уменьшаться. Рождение каждой особи увеличивает численность на единицу, смерть одного члена уменьшает численность популяции также на единицу. Через S_1 обозначим состояние популяции при увеличении ее численности по сравнению с численностью в состоянии S_0 на единицу, через S_k — увеличение ее численности на k единиц. Переход из какого-либо состояния в соседнее означает рождение одной особи (переход вправо) или гибель одной особи (переход влево). Переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояние с соседними номерами, т. е. из состояния S_k только либо в состояние S_{k-1} (уменьшение

численности на единицу), либо в состояние S_{k+1} (увеличение численности на единицу). Будем считать, что все потоки, переводящие систему из одного состояния в другое, — простейшие с интенсивностями соответственно $\lambda_{k, k-1}$ или $\lambda_{k, k+1}$.

Построим размеченный граф системы (рис. 18).

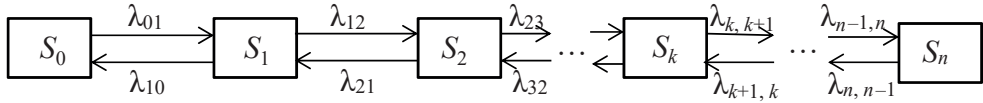


Рис. 18

Число состояний системы конечно. Из каждого состояния за конечное число шагов можно достичь любого другого состояния. Это означает, что выполнены условия теоремы о существовании предельных вероятностей. Следовательно, предельные вероятности состояний системы существуют. Для их отыскания составим систему уравнений по ранее указанному правилу.

Суммарную интенсивность выходящих из состояния потоков умножаем на вероятность этого состояния и приравниваем к сумме произведений интенсивностей входящих потоков на вероятности тех состояний, из которых они исходят.

Для первых двух состояний получим:

$$\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1,$$

$$(\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2.$$

Подставим во второе уравнение вместо первого слагаемого в правой части равное ему выражение из первого уравнения. Получим

$\lambda_{10}p_1 + \lambda_{12}p_1 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{21}p_2$. Следовательно, после сокращения одинаковых слагаемых в правой и левой частях уравнения следует, что $\lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2$.

Добавим уравнение, соответствующее состоянию S_2 (третье состояние), и проделаем ту же операцию, подставив выражение из преобразованного второго уравнения: $(\lambda_{23} + \lambda_{21})p_2 = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 = \lambda_{21}p_2 + \lambda_{32}p_3$. Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем $\lambda_{23}p_2 = \lambda_{32}p_3$. Продолжим этот процесс, переходя к каждому следующему состоянию. В результате получим систему уравнений, в которой для каждого состояния интенсивность потока, выходящего вправо, умноженная на вероятность этого состояния, равна интенсивности потока, входящего

в это состояние справа, умноженной на вероятность соседнего справа состояния.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ \lambda_{23}p_2 = \lambda_{32}p_3, \\ \dots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n. \end{array} \right.$$

В этой системе уравнений для $n + 1$ состояний, а значит и с $n + 1$ неизвестными, n уравнений. Число уравнений на единицу меньше числа неизвестных. Для получения однозначного решения необходимо еще одно уравнение. Добавим условие нормировки: $p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$.

Полученная система уравнений,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ \lambda_{23}p_2 = \lambda_{32}p_3, \\ \dots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n, \\ p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1, \end{array} \right.$$

позволяет однозначно определить предельные вероятности всех $(n + 1)$ возможных состояний системы. Найдем эти вероятности. Сначала выразим все остальные вероятности через p_0 :

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{10}\lambda_{21}} p_0, \quad p_3 = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{32}} p_2 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{32}} p_0, \dots,$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}} p_{n-1} = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{32}\dots\lambda_{n,n-1}} p_0 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0.$$

Подставим полученные выражения в условие нормировки:

$$\left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{32}} + \dots + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{32}\dots\lambda_{n,n-1}} \right) p_0 = 1.$$

Теперь найдем p_0 :

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{32}} + \dots + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{32}\dots\lambda_{n,n-1}} \right)^{-1}.$$

И выразим окончательно все остальные предельные вероятности состояний системы через найденное значение p_0 .

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \\ p_2 &= \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{10}\lambda_{21}} p_0, \\ p_3 &= \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{32}} p_0, \\ &\dots \\ p_n &= \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{32}\dots\lambda_{n,n-1}} p_0. \end{aligned}$$

Во всех этих выражениях коэффициент перед p_0 содержит в числителе произведение интенсивностей всех потоков, идущих от S_0 до рассматриваемого состояния, а в знаменателе произведение интенсивностей всех обратных потоков, идущих от рассматриваемого состояния до S_0 .

Пример.

Найти предельные вероятности состояний системы (рис. 19).

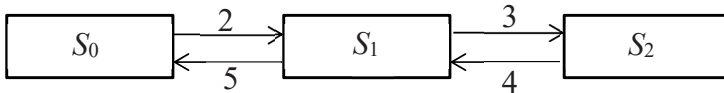


Рис. 19

По схеме процесса гибели и размножения:

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right)^{-1} = \frac{10}{17} \approx 0,59; \\ p_1 &= \frac{2}{5} p_0 = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{17} = \frac{4}{17} \approx 0,23; \quad p_2 = \frac{3}{10} p_0 = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{17} = \frac{3}{17} \approx 0,18. \end{aligned}$$

Действуя по общей схеме, придем к тем же результатам:

$$\left\{ \begin{aligned} 2p_0 &= 5p_1, \\ 8p_1 &= 2p_0 + 4p_2, \\ 4p_2 &= 3p_1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2p_0 &= 5p_1, \\ 8p_1 &= 5p_1 + 4p_2, \\ 4p_2 &= 3p_1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2p_0 &= 5p_1, \\ 3p_1 &= 4p_2, \\ 4p_2 &= 3p_1, \end{aligned} \right. \quad p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

$$p_1 = \frac{2}{5} p_0,$$

$$p_2 = \frac{3}{4} p_1 = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} p_0 = \frac{3}{10} p_0.$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right) p_0 = \frac{17}{10} p_0 = 1.$$

$$p_0 = \frac{10}{17} \approx 0,59; \quad p_1 = \frac{4}{17} \approx 0,23; \quad p_2 = \frac{3}{17} \approx 0,18.$$

Таким образом, найдены вероятности всех состояний системы.

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. Найти предельные вероятности состояний системы, используя данные, представленные на рис. 20.

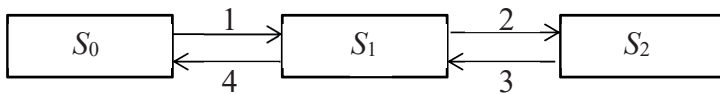


Рис. 20

Задача 2. Построить граф состояний следующего случайного процесса: система состоит из двух автоматов по продаже газированной воды, каждый из которых в случайный момент времени может быть либо занятым, либо свободным. Рассмотреть два варианта возможных состояний системы: с отдельными потоками покупателей к каждому автомату и с общим потоком к двум автоматам. Найти предельные вероятности возможных состояний системы с интенсивностями $\lambda_{01} = 3$, $\lambda_{10} = 4$, $\lambda_{02} = 4$, $\lambda_{20} = 3$, $\lambda_{13} = 2$, $\lambda_{31} = 3$, $\lambda_{23} = 1$, $\lambda_{32} = 4$ для варианта с четырьмя состояниями; с интенсивностями $\lambda_{01} = 7$, $\lambda_{10} = 4$, $\lambda_{12} = 7$, $\lambda_{21} = 8$ для варианта с тремя состояниями.

Решения и ответы

Задача 1.

Рассмотрим два варианта решения данной задачи:

1 вариант. Через уравнения Колмогорова.

$$\begin{cases} p_0 = 4p_1, \\ 3p_2 = 2p_1, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 4p_1, \\ 3p_2 = 2p_1, \\ 3p_0 + 3p_1 + 3p_2 = 3. \end{cases} \Rightarrow 12p_1 + 3p_1 + 2p_1 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{3}{17} \Rightarrow p_0 = \frac{12}{17}, p_1 = \frac{3}{17}, p_2 = \frac{2}{17}.$$

2 вариант. Через процесс гибели и размножения.

$$p_0 = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{17}{12}\right)^{-1} = \frac{12}{17} \approx 0,706.$$

$$p_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{17} = \frac{3}{17} \approx 0,176, \quad p_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{17} = \frac{2}{17} \approx 0,118.$$

Задача 2.

Рассмотрим два варианта возможных состояний системы.

1 вариант. Состояния системы: S_0, S_1, S_2, S_3 .

S_0 — оба автомата свободны;

S_1 — первый автомат занят, второй свободен;

S_2 — второй автомат занят, первый свободен;

S_3 — оба автомата заняты.

$$\lambda_{01} = 3, \lambda_{10} = 4, \lambda_{02} = 4, \lambda_{20} = 3, \lambda_{13} = 2, \lambda_{31} = 3, \lambda_{23} = 1, \lambda_{32} = 4.$$

Представим размеченный граф системы (рис. 21).

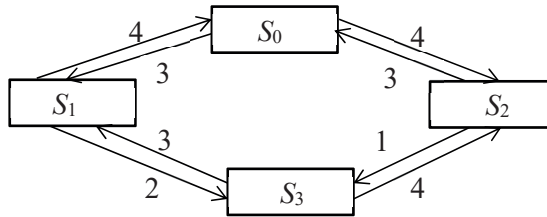


Рис. 21

Система уравнений:

$$\begin{cases} 7p_0 = 4p_1 + 3p_2, \\ 6p_1 = 3p_0 + 3p_3, \\ 4p_2 = 4p_0 + 4p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7p_0 = 4p_1 + 3p_2, \\ 2p_1 = p_0 + p_3, \\ p_2 = p_0 + p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7p_0 = 5p_2, \\ 2p_1 = p_2, \\ p_1 + 2p_2 = 1. \end{cases}$$

$$5p_1 = 1, \Rightarrow p_1 = \frac{1}{5} = 0,2; \quad p_2 = 2p_1 = 0,4;$$

$$7p_0 = 5p_2, \Rightarrow 7p_0 = 5 \cdot 0,4 = 2, \Rightarrow p_0 = \frac{2}{7} \approx 0,29.$$

$$p_3 = p_2 - p_0 = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = \frac{14-10}{35} = \frac{4}{35} \approx 0,11.$$

Ответ.

$$p_0 = \frac{2}{7} \approx 0,29; \quad p_1 = \frac{1}{5} = 0,2; \quad p_2 = \frac{2}{5} = 0,4; \quad p_3 = \frac{4}{35} \approx 0,11.$$

2 вариант. Если интенсивности потоков к каждому автомату одинаковы, то можно их рассматривать как один поток с общей интенсивностью к двухканальной системе обслуживания. Пришедший покупатель идет к любому свободному автомату, т. е. пришедшая заявка обслуживается любым свободным каналом.

Состояния системы: S_0, S_1, S_2 .

S_0 — оба автомата свободны;

S_1 — один из автоматов занят, второй свободен;

S_2 — оба автомата заняты.

$$\lambda_{01} = 7, \lambda_{10} = 4, \lambda_{12} = 7, \lambda_{21} = 8.$$

Представим размеченный граф системы (рис. 22).

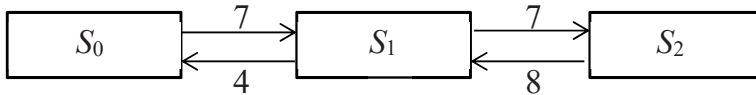


Рис. 22

Система уравнений для отыскания предельных вероятностей:

$$\begin{cases} 7p_0 = 4p_1, \\ 8p_2 = 7p_1, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow p_1 = \frac{7}{4}p_0; \quad p_2 = \frac{7}{8}p_1 = \frac{49}{32}p_0;$$

$$p_0 + \frac{7}{4}p_0 + \frac{49}{32}p_0 = 1, \Rightarrow p_0 = \frac{32}{137} \approx 0,234.$$

$$p_1 = \frac{56}{137} \approx 0,409; \quad p_2 = \frac{49}{137} \approx 0,358;$$

или по схеме процесса гибели и размножения:

$$p_0 = \left(1 + \frac{7}{4} + \frac{7 \cdot 7}{4 \cdot 8}\right)^{-1} = (1 + 1,75 + 1,53125)^{-1} \approx 0,234.$$

$$p_1 = 1,75 \cdot 0,234 \approx 0,409; \quad p_2 = 1,53125 \cdot 0,234 \approx 0,358;$$

Ответ.

$$p_0 = \frac{32}{137} \approx 0,23; \quad p_1 = \frac{56}{137} \approx 0,41; \quad p_2 = \frac{49}{137} \approx 0,36.$$

5. СМО с отказами

5.1. Одноканальная СМО с отказами

Показатели эффективности:

A — абсолютная пропускная способность СМО, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q — относительная пропускная способность СМО, т. е. средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых системой;

$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа, т. е. вероятность того, что заявка покинет СМО не обслуженной.

Система состоит из одного канала обслуживания. Очередь не допускается. Заявка, пришедшая в тот момент, когда канал занят обслуживанием, уходит из системы необслуженной. Поток заявок и поток обслуживаний — простейшие.

Система может находиться только в двух состояниях: S_0 — канал свободен и S_1 — канал занят. Размеченный граф системы имеет следующий вид (рис. 23).

Обозначим, что λ — интенсивность потока заявок, т. е. среднее число поступающих заявок в единицу времени; μ — интенсивность потока обслуживаний.

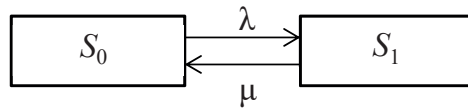


Рис. 23

Среднее время ожидания очередной заявки, т.е. среднее значение интервала времени между поступлением двух соседних заявок (по-другому, средний промежуток времени, в течение которого поступает ровно одна заявка), равно

$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda}$. Например, $\lambda = 5$ заявок в час, тогда $\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{5}$ ч — это среднее

время ожидания поступления очередной заявки.

Поток обслуживаний — это поток заявок, обслуживаемых одним непрерывно занятым каналом. События этого потока — покидание обслуженной заявкой канала СМО. Момент такого покидания — это момент появления данного события. Поскольку продолжительность обслуживания разных заявок считается случайной величиной, то поток обслуживаний является случайным потоком. Будем считать, что это простейший поток. Обозначим через μ интенсивность потока обслуживаний, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени одним непрерывно работающим каналом. Рассматривается способность канала обслужить μ заявок в единицу времени, работая без простоя, т.е. когда заявки поступают без перерыва одна за другой.

Среднее время обслуживания $\bar{t}_{\text{об}} = \frac{1}{\mu}$ — это среднее время, затрачи-

ваемое на обслуживание одной заявки. Например, пусть интенсивность потока обслуживаний $\mu = 0,5$ заявки в мин, тогда среднее время обслуживания одной заявки составляет $\bar{t}_{\text{об}} = \frac{1}{0,5} = 2$ мин. Это

среднее время ожидания очередной заявки возможности поступить на обслуживание. Итак, интенсивность потока событий и среднее время ожидания очередного события — взаимно обратные величины. Интенсивность потока заявок и среднее время ожидания очередной заявки — взаимно обратные величины, интенсивность потока обслуживаний и среднее время обслуживания одной заявки тоже взаимно обратные величины.

Найдем предельные вероятности состояний системы, существование которых очевидно, т. к. система имеет всего два состояния.

По схеме процесса гибели и размножения

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, \\ p_0 + p_1 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu p_1 = \lambda p_0, \\ \mu p_0 + \mu p_1 = \mu. \end{cases} \Rightarrow (\mu + \lambda) p_0 = \mu.$$

$$p_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}; \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}.$$

p_0 — предельная вероятность того, что система свободна, т. е. это средняя доля времени, когда система может обслужить пришедшую заявку (заявке не будет отказано в обслуживании);

p_1 — предельная вероятность того, что система занята обслуживанием имеющейся заявки, а значит пришедшей в это время очередной заявке будет отказано в обслуживании, она покинет СМО необслуженной;

Q — относительная пропускная способность СМО, это доля пришедших на СМО заявок, которая будет обслужена; другими словами, это вероятность того, что пришедшая на СМО заявка будет обслужена. Она равна вероятности того, что ей не будет отказано в обслуживании. Вероятность отказа в обслуживании равна вероятности того, что система занята: $P_{\text{отк}} = p_1$; $Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - p_1 = p_0$.

Итак, в нашем случае

$$Q = p_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}; \quad P_{\text{отк}} = p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}.$$

Теперь найдем абсолютную пропускную способность СМО. Это среднее число заявок, обслуживаемых СМО за единицу времени, т. е. то число заявок, которое составляет долю, определяемую относительной пропускной способностью, от общего числа поступающих в единицу времени заявок (от интенсивности потока заявок). Поэтому абсолютная пропускная способность A СМО равна

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda \mu}{\mu + \lambda}.$$

Выразим основные характеристики эффективности СМО через среднее время ожидания прихода очередной заявки и среднее время обслуживания заявки:

$$Q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\frac{1}{\bar{t}_{об}}}{\frac{1}{\bar{t}_{об}} + \frac{1}{\bar{t}_{ож}}} = \frac{\bar{t}_{ож}}{\bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об}},$$

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} = \frac{\frac{1}{\bar{t}_{ож}}}{\frac{1}{\bar{t}_{об}} + \frac{1}{\bar{t}_{ож}}} = \frac{\bar{t}_{об}}{\bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об}},$$

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda \mu}{\mu + \lambda} = \frac{\frac{1}{\bar{t}_{ож}} \cdot \frac{1}{\bar{t}_{об}}}{\frac{1}{\bar{t}_{об}} + \frac{1}{\bar{t}_{ож}}} = \frac{1}{\bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об}}.$$

Итак, относительная пропускная способность СМО, равная отношению среднего числа обслуженных в единицу времени заявок к общему среднему числу пришедших за это время заявок, т.е. средняя доля обслуженных в единицу времени заявок, равна также отношению среднего времени ожидания очередной заявки (среднее время простоя канала) к сумме средних времен ожидания (простоя) и обслуживания (занятости) канала. Другими словами, это доля среднего времени простоя канала от общего среднего времени (суммы средних времен) простоя и занятости канала. Она равна вероятности того, что очередная пришедшая в СМО заявка будет обслужена.

$$Q = \frac{A}{\lambda} = \frac{\bar{t}_{ож}}{\bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об}} = p_0.$$

Вероятность отказа заявке в обслуживании равна доле среднего времени занятости канала от среднего времени элементарного функционирования канала, т.е. суммы средних времен простоя и занятости:

$$P_{отк} = \frac{\bar{t}_{об}}{\bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об}} = 1 - p_0.$$

Абсолютная пропускная способность канала:

$$A = \lambda Q = \frac{1}{\bar{t}_{ож} + \bar{t}_{об}}.$$

Она равна обратной величине среднего времени элементарного функционирования канала, т. е. суммы средних времен простоя и занятости.

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. Известно, что заявки на телефонные переговоры в телевизионном ателье поступают с интенсивностью, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону равна 2 мин. Определить показатели эффективности СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

Задача 2. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин с одним каналом (одной группой проведения осмотра). На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в среднем 36 машин в сутки. Потоки заявок и обслуживаний — простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра, не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.

Решения и ответы

Задача 1.

$$\lambda = 90 \frac{1}{\text{ч}}, \quad \bar{t}_{\text{об}} = 2 \text{ мин} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30} \text{ ч}, \Rightarrow \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 30 \frac{1}{\text{ч}}.$$

$$Q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{30}{30 + 90} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ (25\%)}.$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} = \frac{90}{120} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ (75\%)}.$$

$$A = \lambda Q = 90 \cdot 0,25 = 22,5.$$

Итак, в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки из 90, что составляет 25 % от поступивших. СМО плохо справляется с потоком заявок.

Ответ. Абсолютная пропускная способность — 22,5, относительная пропускная способность — 25 %, вероятность отказа в обслуживании — 0,75.

Задача 2.

$$\lambda = 36 \frac{1}{\text{сут}} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2} = 1,5 \frac{1}{\text{ч}}, \quad \bar{t}_{\text{об}} = \frac{1}{2} \text{ ч}, \Rightarrow \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 2 \frac{1}{\text{ч}}.$$

$$p_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{2}{2 + 1,5} = \frac{2}{3,5} = \frac{4}{7} \approx 0,57; \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} = \frac{1,5}{3,5} = \frac{3}{7} \approx 0,43;$$

$Q = p_0 = 0,57$; $P_{\text{отк}} = p_1 = 0,43$; $A = \lambda Q = 1,5 \cdot 0,57 = 0,855$ машин/ч или $A = 36 \cdot 0,57 = 20,52$ машин/сут.

Ответ. Относительная пропускная способность пункта обслуживания — 57 %, вероятность отказа в обслуживании — 0,43, абсолютная пропускная способность — 0,855 машин/ч, или 20,52 машин/сут.

5.2. Многоканальная СМО с отказами

Перейдем к рассмотрению многоканальных СМО с отказами.

Задача Эрланга. Имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживаний имеет интенсивность μ . Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

К показателям эффективности одноканальной системы для многоканальной СМО добавим новый показатель: среднее число занятых каналов — $\bar{k}$.

Будем рассматривать систему, работающую без очереди, т. е. с отказами в обслуживании заявкам, пришедшим в тот момент, когда все каналы системы заняты обслуживанием ранее пришедших заявок.

Состояния системы будем нумеровать по числу заявок, находящихся на обслуживании в системе, т. е. S_k — состояние системы, когда в ней находится k заявок (занято k каналов).

Построим размеченный граф системы (рис. 24).

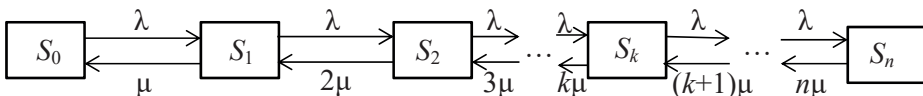


Рис. 24

Поток заявок в систему не зависит от состояния каналов системы, поэтому при любом числе занятых каналов этот поток сохраняет свою интенсивность, следовательно, для любого состояния системы входящий

в это состояние поток заявок (это поток событий, переводящих систему из предыдущего состояния в данное) имеет интенсивность λ . Интенсивность потока обслуживаний равна μ . Это значит, что каждый канал может обслуживать непрерывный поток заявок с интенсивностью μ . Событием такого потока является выход обслуженной заявки из системы, т. е. освобождение канала. Следовательно, μ можно рассматривать как интенсивность освобождения канала после очередного обслуживания заявки. Если в системе заняты два канала (т. е. ее состояние S_2), то может освободиться любой из них с интенсивностью μ , это значит, что суммарная интенсивность перехода в состояние S_1 (занят один канал) равна 2μ . Точно так же, если система находится в состоянии S_k (заняты k каналов), то интенсивность входящего в такое состояние системы потока заявок равна λ , а интенсивность выходящего из этого состояния системы потока обслуживаний (т. е. интенсивность освобождения одного из k занятых каналов) равна $k\mu$, т. к. любой из занятых k каналов может освободиться с интенсивностью μ . Таким образом, $k\mu$ — это интенсивность перехода системы из состояния S_k в состояние S_{k-1} . При этом λ — это интенсивность перехода системы под влиянием потока заявок из состояния S_{k-1} в S_k .

Предельные вероятности состояний системы существуют, т. к. система имеет конечное число состояний и из каждого из них можно за конечное число шагов перейти в любое другое состояние. Поскольку система работает по схеме гибели и размножения, найдем предельные вероятности, используя найденные ранее выражения для этой схемы.

Итак:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2 \cdot 3\mu^3} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \right)^{-1}.$$

Соответственно,

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, p_2 = \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} p_0, p_3 = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} p_0, \dots, p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0, \dots, p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0.$$

Введем новый параметр: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{\text{об}}$. Этот параметр называют *приведенной интенсивностью потока заявок*, или *интенсивностью нагрузки каналов*, или *трафиком*. Он выражает среднее число заявок, входящих за среднее время обслуживания одной заявки.

С учетом введенного параметра получим предельные вероятности состояний системы в следующем виде:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^k}{k!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}.$$

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0, \dots, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Теперь найдем показатели эффективности работы данной СМО.

Вероятность отказа заявке в обслуживании равна вероятности того, что в системе все каналы заняты, т. е. вероятности того, что система находится в состоянии S_n :

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Относительная пропускная способность системы равна вероятности того, что заявке не будет отказано в обслуживании:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Это та доля всех приходящих в систему заявок, которую система может обслужить.

Абсолютная пропускная способность системы равна среднему числу обслуженных заявок из среднего числа заявок, пришедших в систему за единицу времени, т. е. она равна произведению интенсивности потока заявок и относительной пропускной способности системы:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Абсолютная пропускная способность равна интенсивности выходящего из системы потока обслуженных заявок, т. е. это среднее число покидающих систему обслуженных заявок в единицу времени: $v = A$.

Среднее число занятых каналов можно найти как отношение абсолютной пропускной способности к интенсивности потока обслуживаний, т. к. каждый занятый канал в единицу времени может обслужить в среднем μ заявок:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = A \bar{t}_{\text{ос}} = \rho Q = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Это число можно найти также как среднее число обслуженных заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки

одним каналом, или как произведение приведенной интенсивности потока заявок ρ (интенсивность нагрузки каналов) на относительную пропускную способность системы. Кроме того, среднее число занятых каналов — это математическое ожидание числа занятых каналов (случайной величины), которое можно найти по формуле

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^n k p_k .$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \sum_{k=0}^n k p_k = \sum_{k=1}^n k p_k = \sum_{k=1}^n k \frac{\rho^k}{k!} p_0 = \rho \sum_{k=1}^n \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} p_0 = \rho \sum_{k=1}^n p_{k-1} = \rho \sum_{j=0}^{n-1} p_j = \\ &= \rho(p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1}) = \rho(1 - p_n) = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right) = \rho Q, \end{aligned}$$

т. к. сумма вероятностей всех состояний системы равна единице:

$$\sum_{j=0}^n p_j = p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1} + p_n = 1.$$

В качестве дополнительных показателей эффективности работы СМО можно рассмотреть среднее число свободных каналов,

$$\bar{k}_{\text{св}} = n - \bar{k},$$

и коэффициент загрузки (использования, занятости) каналов — отношение среднего числа занятых каналов к общему числу имеющихся у системы каналов

$$k_{\text{зар}} = \frac{\bar{k}}{n}.$$

Коэффициент загрузки каналов определяет долю среднего числа занятых каналов в общем числе имеющихся каналов.

Можно определить и коэффициент простоя каналов

$$k_{\text{пр}} = \frac{\bar{k}_{\text{св}}}{n} = 1 - k_{\text{зар}}.$$

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. Известно, что заявки на телефонные переговоры в телевизионном ателье поступают с интенсивностью, равной 90 заявок/ч, а средняя продолжительность разговора по телефону равна 2 мин.

Определить оптимальное число телефонных номеров в телевизионном ателье, если условием оптимальности считать удовлетворение в среднем из каждых 100 заявок не менее 90 заявок на переговоры. Рассчитать экономическую эффективность телефонного обслуживания, если одна удовлетворенная заявка на переговоры дает в среднем 100 ден. ед. дохода, а содержание одного телефонного номера требует 500 ден. ед./ч. Найти дневной доход от работы СМО, если рабочий день — 8 ч.

Задача 2. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин. На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в среднем 36 машин/сут. Потоки заявок и обслуживаний — простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра, не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной.

Найти минимальное число групп осмотра, при котором относительная пропускная способность пункта осмотра будет не менее 95 %. Решить задачу для случая четырех групп проведения осмотра. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.

Задача 3. В вычислительный центр (ВЦ) коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 ч. Среднее время ожидания поступления заказа — 4 ч.

Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы вычислительного центра. Также найти оптимальное по экономической эффективности количество ЭВМ в ВЦ, если стоимость одного заказа для клиента в среднем составляет 15000 руб., а содержание одной ЭВМ стоит 1000 руб./ч (в расчете на рабочее время).

Решения и ответы

Задача 1.

Найдем интенсивность нагрузки каналов ρ .

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{60}{2} = 30 \text{ } 1/\text{ч}; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{90}{30} = 3, \text{ т. е. за время среднего по продол-$$

жительности телефонного разговора ($\bar{t}_{об} = 2 \text{ мин} = 1/30 \text{ ч}$) поступает в среднем 3 заявки на переговоры.

Будем увеличивать число каналов (телефонных номеров):

$$n = 2: p_0 = (1 + 3 + 4,5)^{-1} = \frac{2}{17} \approx 0,12;$$

$$Q = 1 - 4,5 \cdot 0,12 = 0,46; \quad A = \lambda Q = 90 \cdot 0,46 = 41,4.$$

$$n = 3: p_0 = (1 + 3 + 4,5 + 4,5)^{-1} = \frac{1}{13} \approx 0,077;$$

$$Q = 1 - 4,5 \cdot 0,077 = 0,65; \quad A = \lambda Q = 90 \cdot 0,65 = 58,5.$$

$$n = 4: p_0 = \left(1 + 3 + 4,5 + 4,5 + \frac{81}{24}\right)^{-1} = \frac{8}{131} \approx 0,061;$$

$$Q = 1 - 3,375 \cdot 0,061 \approx 0,79; \quad A = \lambda Q = 90 \cdot 0,79 = 71,5.$$

$$n = 5: p_0 = (1 + 3 + 4,5 + 4,5 + 3,375 + 2,025)^{-1} = \frac{10}{184} \approx 0,054;$$

$$Q = 1 - 2,025 \cdot 0,054 = 0,89; \quad A = \lambda Q = 90 \cdot 0,89 = 80,1.$$

$$n = 6: p_0 = (1 + 3 + 4,5 + 4,5 + 3,375 + 2,025 + 1,0125)^{-1} \approx 0,0515;$$

$$Q = 1 - 1,0125 \cdot 0,0515 \approx 0,95; \quad A = \lambda Q = 90 \cdot 0,95 = 85,5.$$

$$n = 7: p_0 = (1 + 3 + 4,5 + 4,5 + 3,375 + 2,025 + 1,0125 + 0,434)^{-1} \approx 0,05;$$

$$Q = 1 - 0,434 \cdot 0,05 \approx 0,978; \quad A = \lambda Q = 90 \cdot 0,978 = 88,0.$$

Для удобства анализа представим данные в таблице (см. ниже).

Показатели	n						
	1	2	3	4	5	6	7
Q	0,25	0,46	0,65	0,79	0,89	0,95	0,98
A	22,5	41,4	58,5	71,5	80,1	85,5	88,0
$\bar{k}$	0,75	1,38	1,95	2,38	2,67	2,85	2,93
$k_{\text{заг}}$	0,75	0,69	0,65	0,595	0,534	0,475	0,42

Рассчитаем экономическую эффективность СМО по формуле:

$$Д = С \cdot A - З \cdot n,$$

где $Д$ — чистый доход, получаемый от работы СМО в единицу времени; $С$ — доход от одной обслуженной заявки; A — абсолютная пропускная способность СМО; $З$ — затраты на содержание одного канала в единицу времени; n — число каналов СМО.

Например, для $n = 6$ имеем $D = 100 \cdot 85,5 - 500 \cdot 6 = 5550$ ден. ед./ч (см. табл. ниже).

Показатели	n						
	1	2	3	4	5	6	7
Q	0,25	0,46	0,65	0,79	0,89	0,95	0,98
A	22,5	41,4	58,5	71,5	80,1	85,5	88,0
$\bar{k}$	0,75	1,38	1,95	2,38	2,67	2,85	2,93
$k_{\text{заг}}$	0,75	0,69	0,65	0,595	0,534	0,475	0,42
Доход	1750	3140	4360	5150	5510	5550	5300

Ответ. Оптимальное число телефонных номеров равно шести. При этом получают обслуживание 95 % поступающих заявок. Это же количество номеров дает максимальный доход за час работы.

Чистый доход за рабочий день при 6 телефонных номерах и восьмичасовом рабочем дне составляет 44400 ден. ед. ($5550 \cdot 8$).

Задача 2.

Интенсивности потоков:

$$\lambda = \frac{36}{24} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ 1/ч}; \quad \mu = 2 \text{ 1/ч}; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

$n = 2$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{32}\right)^{-1} = \frac{32}{65} \approx 0,492;$$

$$p_1 = 0,75 \cdot 0,492 \approx 0,369; \quad p_2 = 0,28125 \cdot 0,492 \approx 0,138;$$

$$Q = 1 - 0,138 \approx 0,862; \quad A = \lambda Q = 1,5 \cdot 0,862 = 1,293;$$

$$\bar{k} = \rho Q = 0,75 \cdot 0,862 \approx 0,6465 \approx 0,65; \quad P_{\text{отк}} = p_2 \approx 0,138.$$

$n = 3$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{32} + \frac{27}{384}\right)^{-1} \approx 0,476;$$

$$p_1 \approx 0,75 \cdot 0,476 \approx 0,357; \quad p_2 \approx 0,281 \cdot 0,476 \approx 0,134;$$

$$p_3 \approx 0,07 \cdot 0,476 \approx 0,033;$$

$$Q = 1 - 0,033 \approx 0,967; \quad A = \lambda Q \approx 1,5 \cdot 0,967 \approx 1,45;$$

$$\bar{k} = \rho Q = 0,75 \cdot 0,967 \approx 0,725; \quad P_{\text{отк}} = p_3 \approx 0,033.$$

$n = 4$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{32} + \frac{27}{384} + \frac{81}{6144} \right)^{-1} \approx 0,473;$$

$$p_1 \approx 0,75 \cdot 0,473 \approx 0,355; \quad p_2 \approx 0,281 \cdot 0,473 \approx 0,133;$$

$$p_3 \approx 0,07 \cdot 0,473 \approx 0,033; \quad p_4 \approx 0,013 \cdot 0,473 \approx 0,006;$$

$$Q = 1 - 0,006 \approx 0,994; \quad A = \lambda Q \approx 1,5 \cdot 0,994 \approx 1,491;$$

$$\bar{k} = \rho Q \approx 0,75 \cdot 0,994 = 0,7455; \quad P_{\text{отк}} = p_4 \approx 0,006.$$

Занесем полученные данные в таблицу (см. ниже).

Показатели	n			
	1	2	3	4
p_0	0,57	0,492	0,476	0,473
$P_{\text{отк}}$	0,43	0,138	0,033	0,006
Q	0,57	0,862	0,967	0,994
A	0,855	1,293	1,45	1,491
$\bar{k}$	0,43	0,65	0,725	0,746
$k_{\text{заг}}$	0,43	0,325	0,242	0,186

Ответ. 3 канала. ($Q = 0,967$)

Задача 3.

$$n = 3; \quad \lambda = 0,25; \quad \mu = \frac{1}{3} \approx 0,33; \quad \rho = \frac{3}{4} = 0,75.$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{32} + \frac{27}{384} \right)^{-1} \approx 0,476;$$

$$p_1 \approx 0,75 \cdot 0,476 \approx 0,357; \quad p_2 \approx 0,281 \cdot 0,476 \approx 0,134;$$

$$p_3 \approx 0,07 \cdot 0,476 \approx 0,033; \quad P_{\text{отк}} = p_3 \approx 0,033;$$

$$Q = 1 - 0,033 \approx 0,967; \quad A = \lambda Q \approx 0,25 \cdot 0,967 \approx 0,242;$$

$$\bar{k} = A \bar{t}_{\text{ог}} \approx 0,242 \cdot 3 = 0,726; \quad k_{\text{заг}} = 0,726 : 3 = 0,242 = 24,2\%.$$

$$Д = 15000 \cdot 0,242 - 1000 \cdot 3 = 3630 - 3000 = 630 \text{ руб./ч.}$$

Для $n = 2$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{32}\right)^{-1} \approx 0,492;$$

$$p_1 \approx 0,75 \cdot 0,492 = 0,369; \quad p_2 \approx 0,281 \cdot 0,492 \approx 0,138;$$

$$Q \approx 1 - 0,138 = 0,862; \quad A = \lambda Q \approx 0,25 \cdot 0,862 \approx 0,216;$$

$$\bar{k} = A\bar{t}_{\text{ог}} \approx 0,216 \cdot 3 = 0,648; \quad k_{\text{заг}} = 0,648 : 2 = 0,324 = 32,4\%.$$

$$Д = 15000 \cdot 0,216 - 1000 \cdot 2 = 3240 - 2000 = 1240 \text{ руб./ч.}$$

Для $n = 1$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{4}\right)^{-1} \approx 0,571;$$

$$p_1 \approx 0,75 \cdot 0,571 \approx 0,429;$$

$$Q = p_0 = 0,571; \quad A = \lambda Q \approx 0,25 \cdot 0,571 \approx 0,143;$$

$$\bar{k} = A\bar{t}_{\text{ог}} \approx 0,143 \cdot 3 = 0,429; \quad k_{\text{заг}} = 0,429 : 1 = 0,429 = 42,9\%.$$

$$Д = 15000 \cdot 0,143 - 1000 \cdot 1 = 2145 - 1000 = 1145 \text{ руб./ч.}$$

Занесем полученные данные в таблицу (см. ниже).

Показатели	n		
	1	2	3
p_0	0,571	0,492	0,476
$P_{\text{отк}}$	0,429	0,138	0,033
Q	0,571	0,862	0,967
A	0,143	0,216	0,242
$\bar{k}$	0,429	0,648	0,726
$k_{\text{заг}}$	0,429	0,324	0,242
Доход	1145	1240	630

Ответ. Оптимальное количество — две ЭВМ.

6. СМО с ожиданием (очередью)

Рассматриваются системы, в которых для заявок предусмотрена возможность ожидания обслуживания, находясь в организованной очереди. В дальнейшем будем предполагать, что дисциплина очереди простейшая, т. е. заявки обслуживаются в порядке их последовательного поступления в очередь.

Ранее были рассмотрены следующие показатели эффективности работы СМО:

$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа заявке в обслуживании;

Q — относительная пропускная способность системы;

A — абсолютная пропускная способность системы;

$\bar{k}$ — среднее число занятых каналов;

$k_{\text{заг}}$ — коэффициент загрузки каналов.

Добавим к ним новые показатели:

$P_{\text{зан}}$ — вероятность того, что канал занят обслуживанием заявки;

$P_{\text{оч}}$ — вероятность наличия очереди в системе;

$L_{\text{сист}}$ — среднее число заявок, находящихся в системе;

$T_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;
 $L_{\text{оч}}$ — среднее число заявок, находящихся в очереди;
 $T_{\text{оч}}$ — среднее время пребывания заявки в очереди;
 $L_{\text{об}}$ — среднее число заявок, находящихся под обслуживанием;
 $T_{\text{об}}$ — среднее время обслуживания заявки в системе по отношению ко всем заявкам, поступившим в систему в единицу времени.

Рассмотрим различные типы СМО с очередью.

6.1. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Система имеет один канал обслуживания и возможность накопления заявок в очереди. На очередь не наложено никаких ограничений: ни на длину очереди, ни на время пребывания заявки в очереди.

Состояния системы будем нумеровать по суммарному числу занятых каналов и заявок, находящихся в очереди, т. е. по числу заявок, находящихся в системе:

- S_0 — система свободна, т. е. канал не занят, очереди нет;
- S_1 — канал занят, обслуживается одна заявка, очереди нет;
- S_2 — канал занят, обслуживается одна заявка, другая заявка стоит в очереди;
- S_3 — канал занят, две заявки стоят в очереди; ...;
- S_k — канал занят, $(k - 1)$ заявок стоит в очереди; и т. д.

Поскольку очередь не ограничена по длине, система имеет бесконечное множество состояний.

Интенсивность потока заявок (λ) не зависит ни от состояния канала обслуживания (свободен, занят), ни от числа заявок, находящихся в очереди, поэтому переход от любого состояния S_k к состоянию S_{k+1} , который происходит под влиянием потока заявок, совершается с постоянной интенсивностью, равной интенсивности потока заявок (с интенсивностью λ). Канал обслуживания один, интенсивность его освобождения после обслуживания очередной заявки равна интенсивности потока обслуживаний μ и не зависит от числа заявок в очереди. Как только канал освободится, ближайшая заявка из очереди поступает в канал на обслуживание, очередь уменьшается на одну заявку, т. е. система переходит из состояния S_k в состояние S_{k-1} . Следовательно,

переход из любого состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит с постоянной интенсивностью, равной интенсивности потока обслуживаний, т. е. с интенсивностью μ .

Построим размеченный граф системы (рис. 25).

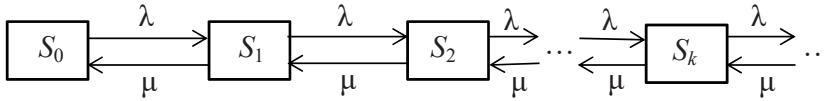


Рис. 25

Система имеет бесконечное множество состояний, поэтому утверждать, что предельные вероятности состояний существуют на основании ранее рассмотренной теоремы об их существовании для конечного числа состояний, нельзя. Докажем существование этих вероятностей в процессе их отыскания.

Система работает по схеме процесса гибели и размножения. Полагая, что предельные вероятности состояний системы существуют, воспользуемся формулами этой схемы. Запишем выражение для p_0 :

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{\lambda^3}{\mu^3} + \dots + \frac{\lambda^k}{\mu^k} + \dots \right)^{-1} = (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

В скобках стоит геометрическая прогрессия со знаменателем $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Такая прогрессия будет иметь конечную сумму, т. е. будет сходящейся, если ее знаменатель меньше единицы. Таким образом, предельная вероятность p_0 состояния S_0 существует при условии $\rho < 1$. По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^k + \dots = \frac{1}{1 - \rho}.$$

$$\text{Следовательно, } p_0 = \left(\frac{1}{1 - \rho} \right)^{-1} = 1 - \rho.$$

Соответственно, предельные вероятности остальных состояний системы найдем по формулам

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \rho^2 p_0, p_3 = \rho^3 p_0, \dots, p_k = \rho^k p_0, \dots$$

Подставляя найденное значение $p_0 = 1 - \rho$, получим

$$p_1 = \rho(1 - \rho), p_2 = \rho^2(1 - \rho), p_3 = \rho^3(1 - \rho), \dots, p_k = \rho^k(1 - \rho), \dots$$

Нетрудно заметить, что все предельные вероятности существуют и конечны, их сумма является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $(1 - \rho)$ и знаменателем $\rho < 1$. Эта сумма равна единице, чему и должна равняться сумма вероятностей всех возможных состояний данной системы:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k(1 - \rho) = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1 - \rho}{1 - \rho} = 1.$$

Мы нашли условие существования предельных вероятностей системы с бесконечным множеством состояний.

Теорема. Если $\rho < 1$, то предельные вероятности состояний данной СМО существуют.

Это означает, что для стабильной работы системы без отказа заявкам в обслуживании необходимо, чтобы интенсивность потока заявок была меньше интенсивности потока обслуживаний. Если же $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \geq 1, \Rightarrow \lambda \geq \mu$, т. е. интенсивность потока заявок превышает (в край-

нем случае равна) интенсивность потока обслуживаний, то система не успевает справляться с заявками, канал становится постоянно загруженным (вероятность его свободного состояния p_0 уже при $\rho = 1$ становится равной нулю), число заявок в очереди быстро стремится к бесконечности и система за конечное время не может обслужить все пришедшие и стоящие в очереди заявки. Система «захлебывается» приходящими заявками. Можно также заметить, что если система справляется с потоком заявок (когда $\rho < 1$), то наиболее вероятное состояние системы — отсутствие в ней заявок. Вероятность p_0 — наибольшая из всех вероятностей состояний системы, т. к. все остальные вероятности равны произведению этой вероятности на степень ρ при том, что $\rho < 1$.

Итак, при $\rho < 1$ существуют предельные вероятности состояний системы:

$$p_0 = 1 - \rho,$$

$$p_1 = \rho(1 - \rho), p_2 = \rho^2(1 - \rho), p_3 = \rho^3(1 - \rho), \dots, p_k = \rho^k(1 - \rho), \dots$$

Найдем показатели эффективности работы системы.

Для СМО с неограниченной очередью при $\rho < 1$ любая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена. Следовательно,

$$P_{\text{отк}} = 0,$$

Отсюда следует, что

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1,$$

т. е. относительная пропускная способность системы — 100 %, а абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q = \lambda.$$

Абсолютная пропускная способность системы равна интенсивности потока заявок (все пришедшие в единицу времени заявки будут обслужены).

Канал будет занят при всех состояниях системы, кроме S_0 , следовательно, вероятность того, что канал занят, равна

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = \rho,$$

а среднее число занятых каналов, равное в данном случае коэффициенту загрузки канала ($n = 1$), равно

$$k_{\text{заг}} = \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho,$$

т. е. приведенной интенсивности потока заявок.

Вероятность наличия очереди можно найти двумя способами. Наличие очереди означает, что в очереди находится хотя бы одна заявка. Следовательно, система находится в любом состоянии, кроме состояний S_0 и S_1 . Вероятность этого равна

$$P_{\text{оч}} = 1 - p_0 - p_1 = 1 - (1 - \rho) - \rho(1 - \rho) = \rho^2.$$

Кроме того, эту вероятность можно найти как сумму вероятностей всех состояний системы, начиная с состояния S_2 , когда в очереди стоит только одна заявка:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{k=2}^{\infty} p_k = \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k p_0 = p_0 \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k = (1 - \rho) \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \rho^2.$$

Итак, вероятность наличия очереди

$$P_{\text{оч}} = \rho^2.$$

Вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена сразу (без ожидания в очереди) равна вероятности того, что система в это момент свободна:

$$P_{\text{об. без оч}} = p_0 = 1 - \rho.$$

Вероятность того, что пришедшая заявка попадет в очередь, равна вероятности того, что система находится в любом состоянии, кроме свободного от наличия заявок, т. е.

$$P_{\text{поп. в оч}} = 1 - P_{\text{об. без оч}} = 1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho.$$

Иначе говоря, она равна сумме вероятности того, что канал занят, но очереди нет, и вероятности наличия очереди:

$$P_{\text{поп. в оч}} = p_1 + P_{\text{оч}} = \rho(1 - \rho) + \rho^2 = \rho.$$

Найдем теперь среднее число заявок, находящихся в системе одновременно. Его можно найти как математическое ожидание случайной величины k — числа заявок в системе, которое равно номеру соответствующего состояния системы. Математическое ожидание равно сумме произведений значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$\begin{aligned} L_{\text{сист}} &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k (1 - \rho) = (1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k = \\ &= (1 - \rho) \rho \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1} = (1 - \rho) \rho \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^k)' = (1 - \rho) \rho \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \right)' = \\ &= (1 - \rho) \rho \left(\frac{\rho}{1 - \rho} \right)' = (1 - \rho) \rho \frac{1 - \rho - \rho(-1)}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Сходящийся степенной ряд можно почленно дифференцировать, сходимость ряда при этом не нарушается, а сумма производных членов ряда равна производной суммы исходного ряда. Мы имеем сумму членов сходящейся геометрической прогрессии, поэтому воспользовались этим свойством степенных рядов.

Таким образом, среднее число заявок в системе равно

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием в системе, найдем как математическое ожидание случайной величины, которая

принимает значение, равное нулю, если в системе нет заявок, и равное единице во всех других состояниях системы:

$$L_{об} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho.$$

Можно заметить, что среднее число заявок, находящихся под обслуживанием в системе, равно вероятности того, что канал занят, и равно среднему числу занятых каналов, т. е. в данном случае коэффициенту загрузки канала:

$$L_{об} = 1 - p_0 = P_{зан} = k_{заг} = \bar{k} = \rho.$$

Итак, для рассматриваемого типа СМО

$$L_{об} = \rho.$$

Найдем теперь среднее число заявок, находящихся в очереди. Эту величину можно найти как разность между средним числом заявок в системе и средним числом заявок, находящихся под обслуживанием:

$$L_{оч} = L_{сист} - L_{об} = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho - \rho + \rho^2}{1 - \rho} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Эту величину называют еще длиной очереди.

Итак,

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Осталось найти среднее время пребывания заявки в системе, в очереди и под обслуживанием. Для этого воспользуемся формулами Литтла.

Теорема. Для любой СМО, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, любой дисциплине обслуживания имеют место формулы:

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист}, \quad T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч}, \quad T_{об} = \frac{1}{\lambda} L_{об}.$$

Эти формулы называются *формулами Литтла*.

Они вытекают из того, что в предельном, стационарном режиме среднее число заявок, прибывающих в систему, равно среднему числу заявок, покидающих ее: оба потока заявок имеют одну и ту же интенсивность.

Применяя эти формулы к исследуемому типу СМО, получим нужные нам характеристики:

- среднее время пребывания заявки в системе

$$T_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)},$$

- среднее время пребывания заявки в очереди

$$T_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)},$$

- среднее время пребывания заявки под обслуживанием, отнесенное к среднему общему количеству заявок, поступающих в систему в единицу времени

$$T_{\text{об}} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}.$$

В силу того, что в данной СМО все поступающие заявки будут обслужены (вероятность отказа в обслуживании равна нулю)

$$T_{\text{об}} = \frac{1}{\mu} = \bar{t}_{\text{об}},$$

т. е. среднее время пребывания заявки под обслуживанием, отнесенное к среднему общему количеству заявок, поступающих в систему в единицу времени, равно среднему времени обслуживания одной заявки при непрерывном потоке обслуживания. В системах с отказом в обслуживании заявок это равенство не имеет места.

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов/сут). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 сут. Предполагая, что очередь может быть неограниченной длины, найти показатели работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем 2 судна.

Задача 2. Анализируется работа междугородного переговорного пункта в небольшом городке. Пункт имеет один телефонный аппарат для переговоров. В среднем за сутки поступает 240 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров (с учетом вызова абонентов в другом городе) составляет 5 мин. Никаких ограничений на длину очереди

нет. Потоки заявок и обслуживаний простейшие. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме.

Решения и ответы

Задача 1.

$$\lambda = 0,4 \text{ } 1/\text{сут}; \quad \bar{t}_{\text{об}} = 2 \text{ сут} \Rightarrow \mu = 0,5 \text{ } 1/\text{сут}, \quad \rho = \lambda \bar{t}_{\text{об}} = 0,4 \cdot 2 = 0,8 < 1.$$

СМО с неограниченной очередью. Предельные вероятности существуют. СМО справляется с потоком заявок.

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,8 = 0,2. \quad p_1 = \rho p_0 = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16.$$

$$p_2 = \rho^2 p_0 = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,64 \cdot 0,2 = 0,128. \quad p_3 = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,1024.$$

$$P(L_{\text{сист}} \leq 3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,5904 \approx 0,59.$$

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0,8}{0,2} = 4; \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{4}{0,4} = 10 \text{ сут.}$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0,64}{0,2} = 3,2; \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{3,2}{0,8} = 8 \text{ сут.}$$

$$L_{\text{об}} = \rho = 0,8; \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{0,8}{0,4} = 2 \text{ сут} = \bar{t}_{\text{об}}.$$

$$A = \lambda = 0,4; \quad Q = 1; \quad P_{\text{оч}} = \rho^2 = 0,64.$$

Вероятность того, что причал занят, а в очереди не более чем два судна

$$P(L_{\text{оч}} \leq 2) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,3904 \approx 0,39.$$

Ответ. Эффективность работы причала — невысокая. Для ее повышения необходимо уменьшение среднего времени разгрузки судна $\bar{t}_{\text{об}}$ или увеличение числа причалов.

Задача 2.

Параметры системы:

$$\lambda = 240 \text{ } 1/\text{сут} = 10 \text{ } 1/\text{ч} = \frac{1}{6} \text{ } 1/\text{мин}; \quad \bar{t}_{\text{об}} = 5 \text{ мин} \Rightarrow \mu = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ } 1/\text{мин},$$

$$\rho = \lambda \bar{t}_{\text{об}} = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} \approx 0,833 < 1.$$

Показатели обслуживания:

$$p_0 = 1 - \rho = \frac{1}{6} \approx 0,167.$$

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{5 \cdot 6}{6} = 5; \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = 5 \cdot 6 = 30 \text{ мин.}$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{25 \cdot 6}{36} = \frac{25}{6} \approx 4,17; \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{25}{6} \cdot 6 = 25 \text{ мин.}$$

$$L_{\text{об}} = \rho = \frac{5}{6}; \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{5}{6} \cdot 6 = 5 \text{ мин} = \bar{t}_{\text{об}}.$$

$$A = \lambda = \frac{1}{6}; \quad Q = 1; \quad P_{\text{оч}} = \rho^2 = \frac{25}{36} \approx 0,694.$$

Ответ. Среднее время ожидания в очереди — 25 мин, среднее время пребывания в системе — 30 мин. Вероятность наличия очереди равна 0,69, среднее число заявок в очереди чуть больше четырех.

6.2. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим систему, которая имеет n каналов обслуживания и возможность накопления заявок в очереди. На очередь не наложено никаких ограничений: ни на длину очереди, ни на время пребывания заявки в очереди.

Состояния системы будем нумеровать по числу занятых каналов и числу заявок, находящихся в очереди, т. е. по числу заявок, находящихся в системе:

- S_0 — система свободна, т. е. каналы не заняты, очереди нет;
- S_1 — один канал занят, обслуживается одна заявка, очереди нет;
- S_2 — заняты два канала, обслуживаются две заявки, очереди нет;
- S_3 — три канала заняты, система обслуживает три заявки, очереди нет; ...;
- S_n — все n каналов заняты обслуживанием заявок, очереди нет;
- S_{n+1} — все n каналов заняты обслуживанием, в очереди стоит одна заявка; ...;
- S_{n+r} — n каналов заняты обслуживанием, в очереди стоят r заявок; и т. д.

Поскольку очередь не ограничена по длине, система имеет бесконечное множество состояний.

Интенсивность потока заявок (λ) не зависит ни от состояния каналов обслуживания (свободны, заняты), ни от числа заявок, находящихся в очереди, поэтому переход от любого состояния S_k к состоянию S_{k+1} , происходящий под влиянием потока заявок, совершается с постоянной интенсивностью, равной интенсивности потока заявок, т. е. с интенсивностью λ . Если обслуживанием заняты k каналов, то суммарная интенсивность их освобождения в результате обслуживания заявок равна $k\mu$, т. к. каждый канал может освободиться с интенсивностью, равной интенсивности потока обслуживаний μ , и система переходит из состояния S_k в состояние S_{k-1} . В случае, когда заняты все n каналов, суммарный поток обслуживаний имеет интенсивность $n\mu$ (это не зависит от числа r заявок в очереди). Как только один из n каналов освободится, ближайшая заявка из очереди поступает в освободившийся канал на обслуживание и очередь уменьшается на одну заявку, т. е. система переходит из состояния S_{n+r} в состояние S_{n+r-1} . Следовательно, переход из любого состояния S_{n+r} в состояние S_{n+r-1} происходит с постоянной интенсивностью, равной максимально возможной суммарной интенсивности потока обслуживаний системы, т. е. с интенсивностью $n\mu$, независимо от числа r заявок, находящихся в очереди.

Построим размеченный граф системы (рис. 26).

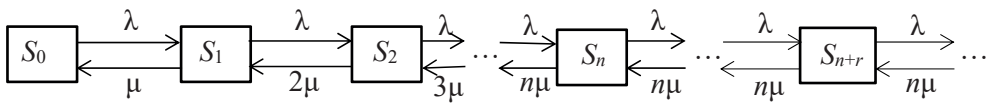


Рис. 26

Система работает по схеме процесса гибели и размножения. Полагая, что предельные вероятности состояний системы существуют, воспользуемся формулами этой схемы. Запишем выражение для p_0 :

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{\lambda^{n+1}}{n!n\mu^{n+1}} + \dots + \frac{\lambda^{n+r}}{n!n^r\mu^{n+r}} + \dots \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!n} + \dots + \frac{\rho^{n+r}}{n!n^r} + \dots \right)^{-1}.$$

Рассмотрим сумму всех слагаемых ряда, стоящего в скобках, начиная со слагаемого, соответствующего состоянию системы S_{n+1} , когда все каналы заняты и одна заявка находится в очереди (начиная с $n + 2$ -го слагаемого)

$$\frac{\rho^{n+1}}{n!n} + \dots + \frac{\rho^{n+r}}{n!n^r} + \dots = \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \dots + \frac{\rho^r}{n^r} + \dots \right).$$

Выделив общий множитель, получаем в скобках сумму членов бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $\frac{\rho}{n}$ и знаменателем

$\frac{\rho}{n}$. Такая прогрессия будет сходящейся, если ее знаменатель $\frac{\rho}{n} < 1$.

Тогда

$$\frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \dots + \frac{\rho^r}{n^r} + \dots \right) = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\frac{\rho}{n}}{(1 - \frac{\rho}{n})} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n - \rho)}.$$

Отсюда следует, что

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n - \rho)} \right)^{-1} \text{ существует, а значит, суще-}$$

ствуют и все остальные предельные вероятности состояний системы.

Теорема. Если $\frac{\rho}{n} < 1$, то предельные вероятности состояний рассматриваемой системы СМО существуют.

При $\frac{\rho}{n} \geq 1$ система перестает справляться с потоком заявок, число заявок в очереди неограниченно растет, стационарный режим работы системы не устанавливается.

Итак, при условии $\frac{\rho}{n} < 1$

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n - \rho)} \right)^{-1},$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+1} &= \frac{\rho^{n+1}}{n!n} p_0, \quad \dots, \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n!n^r} p_0, \quad \dots \end{aligned}$$

Вероятность наличия в системе очереди из заявок, т.е. вероятность того, что хотя бы одна заявка стоит в очереди на обслуживание, равна сумме вероятностей всех состояний системы, начиная с S_{n+1} . Она равна

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0.$$

Ни одна из пришедших в систему заявок не получает отказа в обслуживании. Если каналы заняты, она становится в очередь и в итоге обязательно будет обслужена (при условии, что система справляется с потоком заявок, т.е. при условии $\frac{\rho}{n} < 1$). Таким образом, вероятность отказа заявке в обслуживании равна

$$P_{\text{отк}} = 0,$$

откуда следует, что относительная пропускная способность системы равна

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1$$

(стоцентное обслуживание заявок).

Абсолютная пропускная способность,

$$A = \lambda Q = \lambda,$$

равна интенсивности входящего потока заявок.

Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок равна среднему числу обслуживаемых заявок в единицу времени (абсолютной пропускной способности системы) и, естественно, для данной СМО равна интенсивности входящего потока необслуженных заявок:

$$v = A = \lambda.$$

Среднее число занятых каналов найдем как отношение абсолютной пропускной способности системы к интенсивности потока обслуживания. В данном случае оно равно приведенной интенсивности потока заявок (трафику):

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Можно найти среднее число свободных каналов: $\bar{k}_{\text{св}} = n - \bar{k} = n - \rho$.

Коэффициент загрузки каналов, соответственно, равен отношению среднего числа занятых каналов к общему числу каналов системы:

$$k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{\rho}{n}.$$

Коэффициент загрузки каналов отражает среднюю долю времени, в течение которого каждый канал бывает занят обслуживанием заявки. Следовательно, он равен вероятности того, что произвольно выбранный канал окажется занят:

$$P_{\text{зан}} = k_{\text{заг}} = \frac{\rho}{n}.$$

Найдем среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди (среднюю длину очереди), как математическое ожидание случайной величины:

$$\begin{aligned} L_{\text{оч}} &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^{n+k}}{n! n^k} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{n} \right)^k = \frac{\rho^{n+1}}{n! n} p_0 \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{n} \right)^{k-1} = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n! n} p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\rho}{n} \right)^k \right)'_{\frac{\rho}{n}} = \frac{\rho^{n+1}}{n! n} p_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n} \right)^k \right)'_{\frac{\rho}{n}} = \frac{\rho^{n+1}}{n! n} p_0 \left(\frac{\frac{\rho}{n}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right)'_{\frac{\rho}{n}} = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n! n} p_0 \frac{1 - \frac{\rho}{n} + \frac{\rho}{n}}{\left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2} = \frac{\rho^{n+1}}{n! n} p_0 \frac{n^2}{(n - \rho)^2} = \frac{n \rho^{n+1}}{n! (n - \rho)^2} p_0. \end{aligned}$$

Здесь снова воспользовались возможностью почленного дифференцирования сходящегося степенного ряда и равенством суммы такого ряда производной суммы исходного ряда. Дифференцирование велось по переменной $\frac{\rho}{n}$.

Итак, среднее число заявок в очереди равно

$$L_{\text{оч}} = \frac{n \rho^{n+1}}{n! (n - \rho)^2} p_0.$$

Если учесть, что

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n! (n - \rho)} p_0,$$

то

$$L_{\text{оч}} = \frac{n}{n - \rho} P_{\text{оч}}.$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, очевидно, равно среднему числу занятых каналов:

$$L_{об} = \bar{k} = \rho.$$

Тогда среднее число заявок в системе найдем как сумму среднего числа заявок под обслуживанием и среднего числа заявок в очереди:

$$L_{сист} = L_{об} + L_{оч} = L_{оч} + \rho.$$

$$L_{сист} = \frac{n}{n - \rho} P_{оч} + \rho.$$

По формуле Литтла найдем среднее время пребывания заявки под обслуживанием:

$$T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu} = \bar{t}_{об},$$

т. е. среднее время обработки заявки в системе по отношению ко всем прибывающим в систему заявкам равно среднему времени обработки одной заявки при непрерывном их поступлении, что и должно быть для систем с неограниченной очередью (с полным обслуживанием всех поступивших заявок).

Формулы Литтла позволят найти также среднее время пребывания заявки в очереди:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$$

и в системе:

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}.$$

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. В универсаме к узлу расчета поступает поток покупателей с интенсивностью $\lambda = 81$ чел./ч. Средняя продолжительность обслуживания кассиром одного покупателя $\bar{t}_{об} = 2$ мин. Определить:

а) минимальное количество кассиров $n_{мин}$, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при этом количестве кассиров;

б) оптимальное количество кассиров $n_{\text{опт}}$, при котором относительная величина затрат $C_{\text{отн}}$, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей, задаваемая, например, как $C_{\text{отн}} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{\text{оч}}$, будет минимальной, и сравнить характеристики обслуживания при $n_{\text{мин}}$ и $n_{\text{опт}}$;

в) вероятность того, что в очереди будет не более трех покупателей.

Задача 2. Железнодорожная касса с двумя окошками продает билеты в пункты *A* и *B*. Интенсивность потока пассажиров, желающих купить билеты, для обоих пунктов одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0,45$ (чел./мин). Рассматриваются два варианта продажи билетов: 1-й — билеты продаются в одной кассе с двумя окошками одновременно в оба пункта *A* и *B*; 2-й — билеты продаются в двух специализированных кассах (по одному окошку в каждой): одна — только в пункт *A*, другая — только в пункт *B*. На обслуживание пассажиров кассир тратит в среднем две минуты.

Необходимо:

а) сравнить два варианта продажи билетов по основным характеристикам обслуживания;

б) определить, как надо изменить среднее время обслуживания одного пассажира, чтобы по второму варианту продажи пассажиры затрачивали на приобретение билетов в среднем меньше времени, чем по первому варианту.

Задача 3. Анализируется работа междугородного переговорного пункта в небольшом городке. Пункт имеет три телефонных аппарата для переговоров. В среднем за сутки поступает 240 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров (с учетом вызова абонентов в другом городе) составляет 5 мин. Никаких ограничений на длину очереди нет. Потоки заявок и обслуживаний — простейшие.

Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме.

Решения и ответы

Задача 1.

а) $\lambda = 81$ (чел./ч) = $81/60 = 1,35$ (чел./мин);

$\rho = \lambda/\mu = \lambda \bar{t}_{\text{об}} = 1,35 \cdot 2 = 2,7$.

Чтобы очередь не возрастала до бесконечности нужно, чтобы $\rho/n < 1$, т.е. чтобы $n > \rho$. Следовательно, $n_{\min} = 3$.

Характеристики обслуживания для $n = 3$:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3!(3-2,7)}\right)^{-1} = \left(1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2} + \frac{2,7^3}{6} + \frac{2,7^4}{6 \cdot 0,3}\right)^{-1} = 0,024907 \approx 0,025.$$

Вероятность того, что в узле расчета будет очередь

$$P_{\text{оч}} = \frac{2,7^4}{3!(3-2,7)} p_0 = 29,5245 \cdot 0,025 \approx 0,738. \quad L_{\text{об}} = \rho = 2,7;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{n}{(n-\rho)} P_{\text{оч}} = \frac{3}{0,3} \cdot 0,738 \approx 7,38; \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{7,38}{1,35} \approx 5,47 \text{ (мин)};$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = 7,38 + 2,7 = 10,08; \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{10,08}{1,35} \approx 7,47 \text{ (мин)};$$

$$A = \lambda = 1,35 \text{ (чел./мин)} = 81 \text{ (чел./ч)}; \quad Q = 1 = 100 \%;$$

$$\bar{k} = \rho = 2,7; \quad k_{\text{заг}} = \frac{2,7}{3} = 0,9.$$

$$\text{б) для } n = 3: C_{\text{отн}} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{\text{оч}} = \frac{3}{1,35} + 3 \cdot 5,47 = 18,63;$$

для $n = 4$:

$$p_0 = \left(1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2} + \frac{2,7^3}{6} + \frac{2,7^4}{24} + \frac{2,7^5}{24 \cdot (4-2,7)}\right)^{-1} \approx 0,057;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{4 \cdot 2,7^5}{4!(4-2,7)^2} p_0 = 14,25 \cdot 0,057 \approx 0,807;$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,807}{1,35} = 0,597 \approx 0,60 \text{ (мин)};$$

$$C_{\text{отн}} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{\text{оч}} = \frac{4}{1,35} + 3 \cdot 0,60 = 4,76;$$

для $n = 5$:

$$p_0 = \left(1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2} + \frac{2,7^3}{6} + \frac{2,7^4}{24} + \frac{2,7^5}{120} + \frac{2,7^6}{120 \cdot (5-2,7)}\right)^{-1} \approx 0,065;$$

$$P_{\text{оч}} = \frac{2,7^6}{5!(5-2,7)} \cdot 0,065 \approx 0,091;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{5 \cdot 2,7^6}{5!(5-2,7)^2} \cdot 0,065 \approx 0,198; \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,198}{1,35} \approx 0,147 \text{ (мин)};$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = 0,198 + 2,7 = 2,898; \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{2,898}{1,35} \approx 2,147 \text{ (мин)};$$

$$C_{\text{отн}} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{\text{оч}} = \frac{5}{1,35} + 3 \cdot 0,147 = 4,14.$$

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = \rho = 2,7; \quad k_{\text{заг}} = \frac{2,7}{5} = 0,54;$$

для $n = 6$:

$$p_0 = \left(1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2} + \frac{2,7^3}{6} + \frac{2,7^4}{24} + \frac{2,7^5}{120} + \frac{2,7^6}{720} + \frac{2,7^7}{720 \cdot (6-2,7)} \right)^{-1} \approx 0,067;$$

$$P_{\text{оч}} = \frac{2,7^7}{6!(6-2,7)} \cdot 0,067 \approx 0,029497 \approx 0,029;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{6 \cdot 2,7^7}{6!(6-2,7)^2} \cdot 0,067 \approx 0,0536; \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,0536}{1,35} \approx 0,0397 \approx 0,04 \text{ (мин)};$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = 0,054 + 2,7 = 2,754; \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{2,754}{1,35} = 2,04 \text{ (мин)};$$

$$C_{\text{отн}} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{\text{оч}} = \frac{6}{1,35} + 3 \cdot 0,04 \approx 4,56. \quad L_{\text{об}} = \bar{k} = \rho = 2,7; \quad k_{\text{заг}} = \frac{2,7}{6} = 0,45;$$

для $n = 7$:

$$p_0 = \left(1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2!} + \frac{2,7^3}{3!} + \frac{2,7^4}{4!} + \frac{2,7^5}{5!} + \frac{2,7^6}{6!} + \frac{2,7^7}{7!} + \frac{2,7^8}{7!(7-2,7)} \right)^{-1} \approx 0,067;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{7 \cdot 2,7^8}{7!(7-2,7)^2} \cdot 0,067 \approx 0,0142; \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,0142}{1,35} \approx 0,0105 \text{ (мин)};$$

$$C_{\text{отн}} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{\text{оч}} = \frac{7}{1,35} + 3 \cdot 0,0105 \approx 5,22.$$

Сведем полученные данные в таблицу (см. ниже).

Показатели	n				
	3	4	5	6	7
p_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
$L_{\text{оч}}$	7,38	0,807	0,198	0,054	0,014

Показатели	n				
	3	4	5	6	7
$T_{\text{оч}}$	5,47	0,60	0,147	0,04	0,011
$C_{\text{отн}}$	18,63	4,76	4,14	4,56	5,22

в) вероятность того, что в очереди будет не более трех покупателей.

Для $n = 3$:

$$P(r \leq 3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_{3+1} + p_{3+2} + p_{3+3} = (1 - P_{\text{оч}}) + p_4 + p_5 + p_6 = \\ = 1 - 0,738 + (2,952 + 2,657 + 2,391) \cdot 0,025 = 0,262 + 0,200 = 0,462.$$

Для $n = 5$:

$$P(r \leq 3) = \sum_{k=0}^5 p_k + p_{5+1} + p_{5+2} + p_{5+3} = (1 - P_{\text{оч}}) + p_6 + p_7 + p_8 = \\ = 1 - 0,091 + (0,646 + 0,349 + 0,188) \cdot 0,065 \approx 0,909 + 0,077 = 0,986.$$

Ответ.

а) $n_{\text{мин}} = 3$;

б) оптимальное количество кассиров $n_{\text{опт}} = 5$;

в) вероятность того, что в очереди будет не более трех покупателей для случая трех кассиров равна 0,462, а для случая пяти кассиров — 0,986.

Задача 2.

Рассмотрим два варианта продажи билетов.

1-й вариант. Двухканальная СМО с неограниченной очередью.

$$n = 2; \lambda = 0,45 + 0,45 = 0,9; \bar{t}_{\text{об}} = 2(\text{мин}); \mu = 0,5(1/\text{мин}); \rho = 0,9 \cdot 2 = 1,8.$$

Поскольку $\psi = \rho/n = 1,8/2 = 0,9 < 1$, то предельные вероятности существуют.

$$p_0 = \left(1 + 1,8 + \frac{1,8^2}{2!} + \frac{1,8^3}{2!(2-1,8)} \right)^{-1} = 0,052632 \approx 0,0526;$$

$$P_{\text{оч}} = \frac{1,8^3}{2!(2-1,8)} \cdot 0,052632 = 0,767368 \approx 0,767;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{n}{n - \rho} P_{\text{оч}} \approx \frac{2}{0,2} \cdot 0,767 = 10 \cdot 0,767 = 7,67;$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{7,67}{0,9} \approx 8,52631 \approx 8,526 (\text{мин});$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \rho = 7,67368 + 1,8 = 9,47368 \approx 9,47;$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{9,47368}{0,9} \approx 10,526 \text{ (мин)};$$

2-й вариант.

Два одноканальных узла обслуживания. Для каждого узла:

$$n = 1; \lambda = 0,45; \bar{t}_{\text{об}} = 2 \text{ (мин)}; \mu = 0,5 (\text{1/мин}); \rho = 0,45 \cdot 2 = 0,9.$$

Поскольку $\rho = 0,9 < 1$, то предельные вероятности существуют.

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,9 = 0,1; P_{\text{оч}} = \rho^2 = 0,9^2 = 0,81;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0,9^2}{0,1} = 8,1; T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{8,1}{0,45} = 18 \text{ (мин)};$$

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0,9}{0,1} = 9; T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{9}{0,45} = 20 \text{ (мин)}.$$

Сравним варианты:

а) во втором варианте среднее время приобретения билета пассажиром выросло практически вдвое за счет увеличения более чем вдвое ожидания в очереди. Это произошло вследствие того, что во втором варианте каждый кассир свободен (т.е. простаивает) в среднем 10 % своего рабочего времени ($p_0 = 0,1$), ожидая своего клиента. В первом варианте каждый кассир может продавать билеты в любой из пунктов (А или В) и общая доля среднего времени простоя двух кассиров ($p_0 = 0,053$), меньше, чем во втором варианте;

б) найдем условие, при котором второй вариант даст меньшее среднее время приобретения билета. Имеем $T_{\text{сист } 1} = 10,526 \text{ (мин)}$, $T_{\text{сист } 2} = 20,0 \text{ (мин)}$;

$T_{\text{сист } 1} < T_{\text{сист } 2}$. Потребуем, чтобы $T_{\text{сист } 2} < T_{\text{сист } 1}$. Тогда

$$T_{\text{сист } 2} = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{1 - \rho} < T_{\text{сист } 1}. \text{ Поскольку } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{\text{об}} \text{ и } \rho < 1, \text{ то}$$

$$\frac{\bar{t}_{\text{об}}}{1 - \lambda \bar{t}_{\text{об}}} < T_{\text{сист } 1} \Rightarrow \bar{t}_{\text{об}} < (1 - \lambda \bar{t}_{\text{об}}) T_{\text{сист } 1} \Rightarrow (1 + \lambda T_{\text{сист } 1}) \bar{t}_{\text{об}} < T_{\text{сист } 1} \Rightarrow \bar{t}_{\text{об}} < \frac{T_{\text{сист } 1}}{1 + \lambda T_{\text{сист } 1}}.$$

Отсюда найдем

$$\bar{t}_{\text{об}} < \frac{10,526}{1 + 0,45 \cdot 10,526} \approx 1,83.$$

Ответ. Чтобы по второму варианту продажи пассажиры затрачивали на приобретение билетов в среднем меньше времени, чем по первому варианту, среднее время обслуживания одного пассажира (2 мин) нужно уменьшить более чем на 0,17 мин, или более чем на

$$\frac{0,17(\text{мин})}{2(\text{мин})} \cdot 100 = 8,5\%.$$

Задача 3.

$$n=3; \bar{t}_{\text{об}}=5(\text{мин}); \mu=0,2; \lambda=240(1/\text{сут})=\frac{240}{24 \cdot 60}=\frac{1}{6}(1/\text{мин}); \rho=\frac{5}{6} \approx 0,833.$$

$$\rho < 1; p_0 = \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{5^2}{2!6^2} + \frac{5^3}{3!6^3} + \frac{5^4}{3!6^4(3-\frac{5}{6})} \right)^{-1} \approx 0,432;$$

$$P_{\text{оч}} = \frac{5^4 \cdot 6}{3!6^4 \cdot 13} \cdot 0,432 \approx 0,016;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{n}{n-\rho} P_{\text{оч}} = \frac{3 \cdot 6}{13} \cdot 0,016 \approx 0,022; T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} \approx \frac{0,022}{1/6} = 0,132(\text{мин});$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \rho = 0,022 + 0,833 = 0,855; T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{0,855}{1/6} = 5,13(\text{мин});$$

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = \rho = 5/6 \approx 0,833; k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{5}{6 \cdot 3} \approx 0,278.$$

$$\text{Ответ. } p_0 \approx 0,432; P_{\text{оч}} \approx 0,016; L_{\text{оч}} \approx 0,022; T_{\text{оч}} \approx 0,132(\text{мин});$$

$$L_{\text{сист}} \approx 0,855; T_{\text{сист}} \approx 5,13(\text{мин}); L_{\text{об}} \approx 0,833; \bar{k} \approx 0,833; k_{\text{заг}} \approx 0,278.$$

7. СМО с ограниченной очередью

Будем рассматривать системы массового обслуживания с очередью, на которую наложено ограничение по длине: число заявок в очереди не должно превышать некоторого числа m . Если заявка поступает в систему в момент, когда все места в очереди заняты, то она покидает систему необслуженной.

7.1. Одноканальная СМО с ограниченной очередью

Рассмотрим систему с одним каналом обслуживания и очередью, допустимой, если она не превышает числа $m > 0$. Состояния системы будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе, т.е. S_k — состояние системы, когда в ней находится k заявок:

S_0 — система свободна: канал не занят, очереди нет;
 S_1 — канал занят, обслуживается одна заявка, очереди нет;
 S_2 — канал занят, обслуживается одна заявка, одна заявка стоит в очереди;

S_3 — канал занят, две заявки стоят в очереди; ...;

S_{m+1} — канал занят, m заявок стоят в очереди, т. е. все допустимые места в очереди заняты, очередной заявке, поступившей в систему, будет отказано в обслуживании. Общее число состояний системы в рассматриваемом случае равно $m + 2$. Потоки заявок и обслуживания предполагаются простейшие, их интенсивности равны, соответственно, λ и μ .

Построим размеченный граф системы (рис. 27).

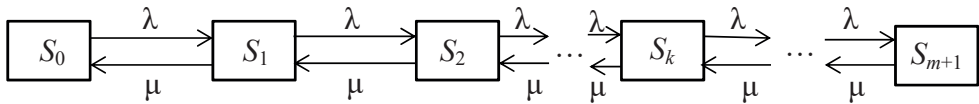


Рис. 27

Поток заявок в систему при любом ее состоянии сохраняет свою интенсивность, которая равна λ , следовательно, для любого состояния системы переход из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит с интенсивностью λ . Интенсивность потока обслуживаний равна μ , это интенсивность освобождения одного работающего в системе канала, следовательно, переход из любого состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит с интенсивностью μ .

Система работает по схеме гибели и размножения и имеет конечное число состояний. Из каждого состояния за конечное число шагов можно перейти в любое другое состояние. Значит, предельные вероятности всех состояний системы существуют. Составим выражение для вычисления предельной вероятности состояния S_0 :

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1}\right)^{-1}, \text{ где } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

При $\rho \neq 1$ в скобках этого выражения стоит сумма членов геометрической прогрессии, но только теперь конечного числа ее членов. Эту сумму найдем по формуле

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q},$$

где b_1 — первый член прогрессии, q — ее знаменатель, n — число членов суммы.

В нашем случае $b_1 = 1$, $q = \rho$, $n = m + 2$.

Отсюда,

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1} = \frac{1 - \rho^{m+2}}{1 - \rho}.$$

Значит, при $\rho \neq 1$

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1})^{-1} = \left(\frac{1 - \rho^{m+2}}{1 - \rho} \right)^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}.$$

Таким образом, p_0 существует и равно полученному выражению при $\rho < 1$ или при $\rho > 1$. Случай $\rho = 1$ разберем особо.

Из этого следует, что при $\rho \neq 1$ предельные вероятности остальных состояний системы соответственно равны:

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \rho^2 p_0, \quad \dots, \quad p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0.$$

Найдем показатели эффективности для рассматриваемого случая.

Вероятность отказа заявке в обслуживании равна вероятности того, что система находится в состоянии S_{m+1} :

$$P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0 = \rho^{m+1} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}.$$

Относительная пропускная способность системы:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \rho^{m+1} p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}.$$

Абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda Q = \lambda (1 - \rho^{m+1} p_0) = \lambda \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}.$$

Вероятность наличия очереди найдем как сумму вероятностей состояний системы, начиная с состояния S_2 и заканчивая состоянием S_{m+1} :

$$P_{\text{оч}} = p_2 + \dots + p_{m+1} = (\rho^2 + \dots + \rho^{m+1}) p_0 = \rho^2 \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} p_0 = \rho^2 \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho^{m+2}}.$$

Здесь мы снова воспользовались формулой суммы конечного числа членов геометрической прогрессии с первым членом, равным ρ^2 , знаменателем, равным ρ , и числом членов, равным m .

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, найдем как математическое ожидание случайной величины, принимающей значение, равное нулю, если система свободна от заявок, и равное единице при всех остальных состояниях системы.

$$L_{об} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0.$$

Среднее число заявок, стоящих в очереди, также найдем как математическое ожидание случайной величины, принимающей возможные значения этого числа, т.е. через сумму произведений значений этой случайной величины на соответствующие им вероятности состояний системы. При этом воспользуемся тем обстоятельством, что производная суммы конечного числа дифференцируемых слагаемых равна сумме их производных.

$$\begin{aligned} L_{оч} &= \sum_{k=1}^m k p_{k+1} = \sum_{k=1}^m k \rho^{k+1} p_0 = \rho^2 p_0 \sum_{k=1}^m k \rho^{k-1} = \rho^2 p_0 \left(\sum_{k=1}^m \rho^k \right)' = \\ &= \rho^2 p_0 \left(\frac{\rho(1 - \rho^m)}{1 - \rho} \right)' = \rho^2 p_0 \frac{(1 - (m+1)\rho^m)(1 - \rho) + \rho - \rho^{m+1}}{(1 - \rho)^2} = \\ &= \rho^2 \frac{1 - m\rho^m - \rho^m - \rho + m\rho^{m+1} + \rho^{m+1} + \rho - \rho^{m+1}}{(1 - \rho)^2} p_0 = \\ &= \rho^2 \frac{1 - \rho^m(m+1 - m\rho)}{(1 - \rho)^2} p_0 = \rho^2 \frac{1 - \rho^m(m+1 - m\rho)}{(1 - \rho)(1 - \rho^{m+2})}. \end{aligned}$$

Итак, среднее число заявок, находящихся в очереди, получим с помощью формул:

$$L_{оч} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m(m+1 - m\rho)}{(1 - \rho)^2} p_0 = \rho^2 \frac{1 - \rho^m(m+1 - m\rho)}{(1 - \rho)(1 - \rho^{m+2})}.$$

Среднее число заявок в системе найдем как сумму среднего числа заявок под обслуживанием и среднего числа заявок в очереди:

$$L_{сист} = L_{об} + L_{оч}.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди, под обслуживанием и в системе найдем по формулам Литтла:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}, \quad T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda}, \quad T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}.$$

В результате получены формулы, характеризующие работу системы при условии $\rho \neq 1$.

Предельные вероятности состояний системы:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$$

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \rho^2 p_0, \quad \dots, \quad p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0.$$

Вероятность отказа заявке в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = \rho^{m+1} p_0 = \rho^{m+1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$$

Вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1-\rho^m}{1-\rho} p_0 = \rho^2 \frac{1-\rho^m}{1-\rho^{m+2}}.$$

Относительная пропускная способность системы:

$$Q = 1 - \rho^{m+1} p_0 = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda(1 - \rho^{m+1} p_0) = \lambda \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, или средняя загрузка канала:

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = k_{\text{заг}} = 1 - p_0.$$

Среднее число заявок, стоящих в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2} p_0 = \rho^2 \frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}.$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{об}} + L_{\text{оч}}.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди, под обслуживанием и в системе:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}, \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda}, \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\rho = 1$ и, следовательно, $\lambda = \mu$.

В этом случае в формуле для предельной вероятности свободного состояния системы все слагаемые в скобках равны единице:

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1})^{-1} = (1 + 1 + 1 + \dots + 1)^{-1}.$$

Следовательно, в скобках стоит сумма не геометрической, а арифметической прогрессии с конечным числом членов и (в данном случае) с разностью $d = 0$. Число единиц в скобках равно числу состояний системы, т. е. равно $m + 2$. Таким образом, для этого случая

$$p_0 = (1 + 1 + 1 + \dots + 1)^{-1} = (m + 2)^{-1} = \frac{1}{m + 2}.$$

Переходя к нахождению предельных вероятностей остальных состояний системы, видим, что вероятности всех без исключения состояний системы равны в этом случае друг другу и равны вероятности свободного состояния системы:

$$p_0 = p_1 = p_2 = \dots = p_{m+1} = \frac{1}{m + 2}.$$

Очевидно, что сумма всех этих вероятностей (т. к. их число равно $m + 2$) равна единице.

Вероятность отказа заявке в обслуживании равна вероятности состояния S_{m+1} системы, когда все места в очереди заняты:

$$P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \frac{1}{m + 2}.$$

Вероятность наличия очереди равна сумме вероятностей состояний системы от S_2 до S_{m+1} , таких состояний у системы m :

$$P_{\text{оч}} = \frac{m}{m + 2}.$$

Относительная пропускная способность системы:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{m + 1}{m + 2}.$$

Абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda Q = \lambda \frac{m + 1}{m + 2}.$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, или среднюю загрузку канала снова найдем по формуле:

$$L_{\text{об}} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0 = 1 - \frac{1}{m+2} = \frac{m+1}{m+2}.$$

Таким образом,

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = k_{\text{заг}} = \frac{m+1}{m+2}.$$

Найдем среднее число заявок, стоящих в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \sum_{k=1}^m k p_{k+1} = \sum_{k=1}^m k p_0 = \frac{1}{m+2} \sum_{k=1}^m k = \frac{1}{m+2} (1 + 2 + \dots + m).$$

В скобках сумма m членов арифметической прогрессии с разностью $d = 1$.

Формула для суммы n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

где a_1 — первый и a_n — последний члены прогрессии.

В нашем случае

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{(1+m)m}{2}.$$

Значит,

$$L_{\text{оч}} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)}.$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{об}} + L_{\text{оч}} = \frac{m+1}{m+2} + \frac{m(m+1)}{2(m+2)} = \frac{2(m+1) + m(m+1)}{2(m+2)} = \frac{m+1}{2}.$$

Итак,

$$L_{\text{сист}} = \frac{m+1}{2}.$$

Среднее время пребывания заявки под обслуживанием, в очереди и в системе можно получить в следующем виде:

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{m+1}{m+2} = \frac{1}{\mu} \frac{m+1}{m+2} = \bar{t}_{\text{об}} \frac{m+1}{m+2},$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{m(m+1)}{2(m+2)} = \bar{t}_{\text{ож}} \frac{m(m+1)}{2(m+2)},$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{m+1}{2} = \bar{t}_{\text{ож}} \frac{m+1}{2},$$

т. к. мы рассматриваем случай, когда $\lambda = \mu$, то в данном случае

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu} = \bar{t}_{\text{об}}.$$

Среднее время обработки заявки в системе $T_{\text{об}}$, рассчитанное по отношению ко всему потоку заявок (т. е. с учетом как обслуженных заявок, так и тех, которым было отказано в обслуживании), не совпадает со средним временем $\bar{t}_{\text{об}}$ обработки одной заявки при непрерывном потоке обслуживания. Оно зависит от числа m — имеющихся мест в очереди — и меньше, чем $\bar{t}_{\text{об}}$, т. к. общее время, затраченное на обслуживание заявок, делится на общее количество пришедших в систему заявок, включая и ушедшие необслуженными. Проведенный анализ показывает, что системы рассмотренного типа сохраняют работоспособность при интенсивности потока заявок, равном или большим интенсивности обслуживания, за счет возможности отказа некоторой части заявок в обслуживании.

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. В порту имеется один причал для разгрузки судов, интенсивность потока судов равна 0,4 (судов/сут), среднее время разгрузки одного судна составляет двое суток. Известно, что приходящее судно покидает причал без разгрузки, если в очереди на разгрузку стоит более двух судов. Найти показатели эффективности работы причала.

Задача 2. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин с одним каналом (одной группой проведения осмотра). На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в среднем 36 машин/сут. Потоки заявок и обслуживаний — простейшие. Машина, прибывшая в пункт осмотра, покидает пункт осмотра необслуженной лишь в случае, когда в очереди на осмотр стоит более пяти машин. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.

Задача 3. Анализируется работа междугородного переговорного пункта в небольшом городке. Пункт имеет один телефонный аппарат для переговоров. В среднем за сутки поступает 240 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров (с учетом вызова абонентов в другом городе) составляет 5 мин. Длина очереди не должна превышать 6 человек. Потоки заявок и обслуживаний — простейшие. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме.

Задача 4. На мойку в среднем за час приезжает три автомобиля. Мойка оборудована только одним моечным агрегатом, среднее время мойки одного автомобиля — 20 мин. На стоянке есть два места для ожидающих машин. Время работы мойки — 12 ч в сутки, стоимость услуги — 70 руб. для одного автомобиля. Провести анализ работы СМО. Оценить потерю выручки из-за отказа в обслуживании.

Решения и ответы

Задача 1.

Одноканальная СМО с ограниченной очередью ($n = 1, m = 3$).

$$n = 1; m = 3; \lambda = 0,4 \left(\frac{1}{\text{сут}} \right); \bar{t}_{\text{об}} = 2(\text{сут}); \mu = 0,5 \left(\frac{1}{\text{сут}} \right); \rho = 0,4 \cdot 2 = 0,8.$$

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4)^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} = \frac{1 - 0,8}{1 - 0,8^5} = \frac{0,2}{0,67} \approx 0,297;$$

$$P_{\text{отк}} = \rho^4 p_0 = 0,8^4 \cdot 0,297 \approx 0,122;$$

$$P_{\text{оч}} = \rho^2 \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} p_0 = 0,8^2 \cdot \frac{1 - 0,8^3}{1 - 0,8} 0,297 \approx 0,464;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,122 = 0,878; A = \lambda Q = 0,4 \cdot 0,878 \approx 0,351;$$

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 \cdot \frac{1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)} = 0,8^2 \cdot \frac{1 - 0,8^3 (4 - 3 \cdot 0,8)}{(1 - 0,8^5)(1 - 0,8)} \approx 0,861;$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,861}{0,4} = 2,1525 \approx 2,153 (\text{сут});$$

$$L_{\text{об}} = 1 - p_0 = 1 - 0,297 = 0,703;$$

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{0,703}{0,4} = 1,7575 \approx 1,758 (\text{сут});$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = 0,861 + 0,703 = 1,564; \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{1,564}{0,4} = 3,91 \text{ (сут.)}.$$

Ответ. $P_{\text{отк}} \approx 0,122; \quad P_{\text{оч}} \approx 0,464; \quad Q \approx 0,878; \quad A \approx 0,351; \quad L_{\text{оч}} \approx 0,861;$
 $T_{\text{оч}} \approx 2,153 \text{ (сут.); } L_{\text{об}} \approx 0,703; \quad T_{\text{об}} \approx 1,758 \text{ (сут.); } L_{\text{сист}} = 1,564; \quad T_{\text{сист}} = 3,91 \text{ (сут.)}.$

Задача 2.

Одноканальная СМО с ограниченной очередью ($n = 1, m = 6$).

$$n = 1; \quad m = 6; \quad \lambda = 36 \left(\frac{1}{\text{сут}} \right) = \frac{36}{24} = 1,5 \text{ (ч); } \quad \bar{t}_{\text{об}} = 0,5 \text{ (ч);}$$

$$\mu = 2 \left(\frac{1}{\text{ч}} \right); \quad \rho = \lambda \bar{t}_{\text{об}} = 1,5 \cdot 0,5 = 0,75.$$

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} = \frac{1 - 0,75}{1 - 0,75^8} \approx \frac{0,25}{0,9} = 0,278;$$

$$P_{\text{отк}} = \rho^7 p_0 \approx 0,75^7 \cdot 0,278 \approx 0,037;$$

$$P_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} p_0 = 0,75^2 \frac{1 - 0,75^6}{1 - 0,75} 0,278 \approx 0,514;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,037 = 0,963 = 96,3 \%;$$

$$A = \lambda Q = 1,5 \cdot 0,963 = 1,4445 \left(\frac{1}{\text{ч}} \right) = 34,668 \left(\frac{1}{\text{сут}} \right);$$

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)}{(1 - \rho)^2} p_0 = 0,75^2 \frac{1 - 0,75^6 (7 - 6 \cdot 0,75)}{(1 - 0,75)^2} \cdot 0,278 \approx 1,389;$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{1,389}{1,5} = 0,926 \text{ (ч)} = 55,56 \text{ (мин);}$$

$$L_{\text{об}} = 1 - p_0 = 1 - 0,278 = 0,722; \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{0,722}{1,5} \approx 0,481 \text{ (ч);}$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = 1,389 + 0,722 = 2,111; \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{2,111}{1,5} = 1,407 \text{ (ч);}$$

$L_{\text{об}}$ и $T_{\text{об}}$ можно найти по другим формулам, проверив таким образом правильность части расчетов:

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = 0,75 \cdot 0,963 = 0,72225,$$

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{A}{\lambda \mu} = \frac{\rho Q}{\lambda} = \frac{Q}{\mu} = \bar{t}_{\text{об}} Q = 0,5 \cdot 0,963 = 0,4815 \text{ (ч)}.$$

Ответ. $P_{\text{отк}} \approx 0,037$; $P_{\text{оч}} \approx 0,514$; $Q = 0,963$; $A \approx 34,668 \left(\frac{1}{\text{сут}} \right)$;

$L_{\text{оч}} \approx 1,389$; $T_{\text{оч}} \approx 0,926 (\text{ч})$; $L_{\text{об}} \approx 0,722$; $T_{\text{об}} \approx 0,481 (\text{ч})$;

$L_{\text{сист}} \approx 2,111$; $T_{\text{сист}} \approx 1,407 (\text{ч})$;

Задача 3.

Одноканальная СМО с ограниченной очередью ($n = 1, m = 6$).

$n = 1$; $m = 6$; $\lambda = \frac{1}{6} (\text{1/мин})$; $\bar{t}_{\text{об}} = 5 (\text{мин})$; $\mu = \frac{1}{5} (\text{1/мин})$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} \approx 0,833$.

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right)^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} = \frac{1 - \frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8} \approx 0,217;$$

$$P_{\text{отк}} = \rho^{m+1} p_0 = \left(\frac{5}{6} \right)^7 \cdot 0,217 \approx 0,0606;$$

$$P_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m}{(1 - \rho)^{m+2}} = \left(\frac{5}{6} \right)^2 \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8} \approx 0,602;$$

$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,0606 = 0,9394 \approx 93,9 \%$;

$A = \lambda Q = 1/6 \cdot 0,9394 \approx 0,1566 (\text{1/мин})$;

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)}{(1 - \rho)^2} p_0 = \left(\frac{5}{6} \right)^2 \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 (7 - 5)}{(1 - \frac{5}{6})^2} \cdot 0,217 \approx 1,791;$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{1,791}{1/6} = 10,746 (\text{мин})$$

$$L_{\text{об}} = 1 - p_0 = 1 - 0,217 = 0,783; \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{0,783}{1/6} = 4,698 (\text{мин})$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = 1,791 + 0,783 = 2,574; \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{2,574}{1/6} = 15,444 (\text{мин})$$

Проверка совпадения: $T_{\text{сист}} = T_{\text{оч}} + T_{\text{об}} = 10,746 + 4,698 = 15,444 (\text{мин})$.

Ответ. $P_{\text{отк}} \approx 0,061$; $P_{\text{оч}} \approx 0,602$; $Q \approx 0,939$; $A \approx 0,157 (\text{1/мин})$;

$L_{\text{оч}} \approx 1,791$; $T_{\text{оч}} \approx 10,746 (\text{мин})$; $L_{\text{об}} \approx 0,783$; $T_{\text{об}} \approx 4,698 (\text{мин})$;

$L_{\text{сист}} \approx 2,574$; $T_{\text{сист}} \approx 15,444 (\text{мин})$;

Задача 4.

Одноканальная СМО с ограниченной очередью ($n = 1, m = 2; \rho = 1$).

$$n = 1; m = 2; \lambda = 3(\frac{1}{\text{ч}}); \bar{t}_{\text{об}} = 20(\text{мин}) = \frac{1}{3}(\text{ч}); \mu = 3(\frac{1}{\text{ч}}); \rho = \lambda \bar{t}_{\text{об}} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

$$p_0 = (1 + \rho + m\rho)^{-1} = (1 + 1 + m)^{-1} = \frac{1}{m+2} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_0 = 0,25;$$

$$P_{\text{оч}} = mp_0 = 2 \cdot 0,25 = 0,5; P_{\text{отк}} = p_3 = p_0 = 0,25;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,25 = 0,75;$$

$$A = \lambda Q = 3 \cdot 0,75 = 2,25(\frac{1}{\text{ч}});$$

$$L_{\text{об}} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = 0,75; T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{Q}{\mu} = \bar{t}_{\text{об}} Q = \frac{0,75}{3} = 0,25(\text{ч}) = 15(\text{мин});$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)} = \frac{3}{4} = 0,75; T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,75}{3} = 0,25(\text{ч}) = 15(\text{мин});$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = 0,75 + 0,75 = 1,5; T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{1,5}{3} = 0,5(\text{ч}) = 30(\text{мин});$$

$$T_{\text{сист}} = T_{\text{оч}} + T_{\text{об}} = 15 + 15 = 30(\text{мин}).$$

Потеря выручки:

$$S = (\lambda - A) \cdot t \cdot C = (3 - 2,25) \cdot 12 \cdot 70 = 630 \text{ руб.}$$

Здесь t — время работы пункта, C — стоимость обслуживания.

Ответ. Средняя доля потерянных заявок составляет 25 % от числа поступивших. При двенадцатичасовом режиме работы потеря выручки из-за отказа в обслуживании составит 630 руб.

7.2. Многоканальная СМО с ограниченной очередью

Рассмотрим систему, которая имеет n каналов обслуживания и может обладать очередью, не превышающей m заявок ($m > 0$). Состояния системы будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе, т. е. S_k — состояние системы, когда в ней находится k заявок:

S_0 — система свободна: заявок в системе нет;

S_1 — занят один канал, обслуживается одна заявка, очереди нет;
 S_2 — два канала заняты, обслуживаются две заявки, очереди нет; ...;
 S_n — заняты все n каналов, очереди нет;
 S_{n+1} — все n каналов заняты, в очереди стоит одна заявка; ...;
 S_{n+m} — все каналы заняты, m заявок стоят в очереди, т. е. все допустимые места в очереди заняты, очередной поступившей в систему заявке будет отказано в обслуживании.

Общее число состояний системы в рассматриваемом случае равно $n + m + 1$. Потoki заявок и обслуживания предполагаются простейшие. Интенсивность входящего потока заявок равна λ , интенсивность потока обслуживаний равна μ .

Построим размеченный граф системы (рис. 28).

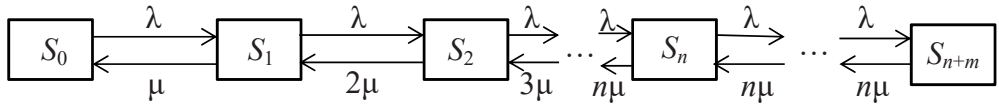


Рис. 28

Поток заявок в систему при любом ее состоянии сохраняет свою интенсивность λ , следовательно, для любого состояния системы при приходе очередной заявки переход из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит с интенсивностью λ . Интенсивность потока обслуживаний равна μ — интенсивности освобождения одного канала. Следовательно, если заняты k каналов, интенсивность освобождения одного (любого) из них происходит с интенсивностью $k\mu$, переход из состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит с интенсивностью $k\mu$. Если заняты все n каналов, то интенсивность освобождения одного из них равна $n\mu$. Это максимально возможная интенсивность освобождения каналов, она не зависит от числа заявок, находящихся в очереди. Поэтому переход из состояния S_{n+k} в состояние S_{n+k-1} происходит с постоянной интенсивностью, равной $n\mu$, независимо от числа k заявок, ожидающих обслуживания в очереди ($1 \leq k \leq m$).

Система работает по схеме гибели и размножения и имеет конечное число состояний. Из каждого состояния за конечное число шагов можно перейти в любое другое состояние. Значит, предельные вероятности всех состояний системы существуют. Составим выражение для вычисления предельной вероятности состояния S_0 :

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!n} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} \right)^{-1}, \text{ где } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Сумма последних m слагаемых, стоящих в скобках этого выражения, является при $(\rho/n \neq 1)$ суммой конечного числа членов геометрической прогрессии с первым членом прогрессии $b_1 = \frac{\rho^{n+1}}{n!n}$, знаменате-

лем $q = \frac{\rho}{n}$ и числом членов $k = m$. Эту сумму найдем по формуле

$$S_k = \frac{b_1(1-q^k)}{1-q}, \text{ получим}$$

$$\frac{\rho^{n+1}}{n!n} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m}{1 - \frac{\rho}{n}}.$$

Значит, при $\rho/n \neq 1$

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m}{1 - \frac{\rho}{n}} \right)^{-1}.$$

Из этого следует, что при $\rho/n \neq 1$ предельные вероятности остальных состояний системы соответственно равны:

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} p_0, \\ \dots, \quad p_{n+m} &= \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0. \end{aligned}$$

Найдем показатели эффективности для рассматриваемого случая.

Вероятность отказа заявке в обслуживании равна вероятности того, что система находится в состоянии S_{n+m} :

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0.$$

Относительная пропускная способность системы:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0.$$

Абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0\right).$$

Вероятность наличия очереди найдем как сумму вероятностей состояний системы, начиная с состояния S_{n+1} и заканчивая состоянием S_{n+m} .

$$P_{\text{оч}} = p_{n+1} + \dots + p_{n+m} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m}{1 - \frac{\rho}{n}} p_0 = \frac{\rho^{n+1}(n^m - \rho^m)}{n!n^m(n - \rho)} p_0.$$

Здесь воспользовались ранее найденной суммой конечного числа членов геометрической прогрессии.

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, найдем как среднее число занятых каналов, т. е. как среднее число обслуживаемых заявок за среднее время обслуживания одной заявки:

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = A \bar{t}_{\text{об}} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0\right).$$

Среднее число заявок, стоящих в очереди, найдем как математическое ожидание случайной величины, принимающей возможные значения этого числа заявок, т. е. через сумму произведений значений этой случайной величины на соответствующие им вероятности состояний системы. Суммируем по состояниям системы, соответствующим наличию очереди, т. е. от состояния S_{n+1} до состояния S_{n+m} . При этом опять воспользуемся тем обстоятельством, что производная суммы конечного числа дифференцируемых слагаемых равна сумме их производных:

$$\begin{aligned} L_{\text{оч}} &= \sum_{k=1}^m k p_{n+k} = \sum_{k=1}^m k \frac{\rho^{n+k}}{n!n^k} p_0 = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} p_0 \sum_{k=1}^m k \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-1} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} p_0 \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{\rho}{n}\right)^k\right)'_{\frac{\rho}{n}} = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n!n} p_0 \left(\frac{\frac{\rho}{n}(1 - (\frac{\rho}{n})^m)}{1 - \frac{\rho}{n}}\right)'_{\frac{\rho}{n}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} p_0 \frac{(1 - (m+1)(\frac{\rho}{n})^m)(1 - \frac{\rho}{n}) + \frac{\rho}{n} - (\frac{\rho}{n})^{m+1}}{(1 - \frac{\rho}{n})^2} = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n!n} p_0 \frac{1 - m(\frac{\rho}{n})^m - (\frac{\rho}{n})^m - \frac{\rho}{n} + m(\frac{\rho}{n})^{m+1} + (\frac{\rho}{n})^{m+1} + \frac{\rho}{n} - (\frac{\rho}{n})^{m+1}}{(1 - \frac{\rho}{n})^2} = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \cdot \frac{1 - (\frac{\rho}{n})^m (m+1 - m\frac{\rho}{n})}{(1 - \frac{\rho}{n})^2} p_0 = \frac{\rho^{n+1} [n^{m+1} - \rho^m (mn + n - m\rho)]}{n!n^m(n - \rho)^2} p_0. \end{aligned}$$

Итак, среднее число заявок, находящихся в очереди, можно найти по формулам:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \cdot \frac{1 - (\rho/n)^m (m+1 - m\rho/n)}{(1 - \rho/n)^2} p_0 = \frac{\rho^{n+1} [n^{m+1} - \rho^m (mn + n - m\rho)]}{n!n^m(n - \rho)^2} p_0.$$

Среднее число заявок в системе найдем как сумму среднего числа заявок под обслуживанием и среднего числа заявок в очереди:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{об}} + L_{\text{оч}}.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди, под обслуживанием и в системе найдем по формулам Литтла:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}, \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda}, \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}.$$

Коэффициент загрузки каналов найдем по формулам:

$$k_{\text{заг}} = \frac{L_{\text{об}}}{n} = \frac{A}{n\mu} = \frac{\bar{k}}{n}.$$

В результате получены формулы, характеризующие работу системы при условии $\frac{\rho}{n} \neq 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\frac{\rho}{n} = 1$ и, следовательно, $\lambda = n\mu$.

В этом случае в формуле для предельной вероятности p_0 (в скобках) последние m слагаемые, соответствующие наличию очереди, равны друг другу:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \underbrace{\frac{\rho^n}{n!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}_m \right)^{-1} = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + m \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}.$$

Значит, они образуют сумму не геометрической, а арифметической прогрессии с разностью $d = 0$. Число этих слагаемых равно числу состояний системы, при которых в системе есть очередь, т.е. равно m . Следовательно, для этого случая

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + m \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}.$$

Предельные вероятности остальных состояний системы:

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = p_{n+2} = \dots = p_{n+m} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Можно доказать, что сумма всех этих вероятностей, включая p_0 , равна единице.

Вероятность отказа заявке в обслуживании равна вероятности состояния S_{n+m} системы, когда все места в очереди заняты:

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Вероятность наличия очереди равна сумме вероятностей состояний системы от S_{n+1} до S_{n+m} . Таких состояний у системы — (m) , вероятность каждого из них равна p_n ,

$$P_{\text{оч}} = m p_n = m \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Относительная пропускная способность системы:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, или среднее число занятых каналов, найдем как отношение абсолютной пропускной способности к интенсивности потока обслуживания:

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Коэффициент загрузки каналов:

$$k_{\text{зар}} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{\rho}{n} \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Найдем среднее число заявок, стоящих в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \sum_{k=1}^m k p_{n+k} = \sum_{k=1}^m k p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \sum_{k=1}^m k = \frac{\rho^n}{n!} p_0 (1 + 2 + \dots + m).$$

В скобках сумма m членов арифметической прогрессии с разностью $d = 1$.

Формула для суммы n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

где a_1 — первый и a_n — последний члены прогрессии.

В нашем случае

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{(1 + m)m}{2}.$$

Значит,

$$L_{\text{оч}} = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{об}} + L_{\text{оч}}.$$

Среднее время пребывания заявки под обслуживанием:

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{Q}{\mu} = \bar{t}_{\text{об}} Q = \bar{t}_{\text{об}} \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$

Среднее время пребывания заявки в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{m(m+1)\rho^n}{2 \cdot n!} p_0 = \bar{t}_{\text{ож}} \frac{m(m+1)\rho^n}{2 \cdot n!} p_0.$$

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = T_{\text{оч}} + T_{\text{об}}.$$

Мы рассматривали случай, когда $\lambda = n\mu$. В данном случае

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n\mu} = \frac{\bar{t}_{\text{об}}}{n},$$

т. е. в этом случае $\bar{t}_{\text{ож}}$ — среднее время ожидания очередной заявки — в n раз меньше $\bar{t}_{\text{об}}$ — среднего времени обслуживания одной заявки.

Иными словами, за среднее время обслуживания одной заявки в этом случае в систему приходит в среднем n новых заявок.

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин с двумя группами проведения осмотра. На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в среднем 36 машин/сут. Потоки заявок и обслуживаний — простейшие. Машина, прибывшая в пункт осмотра, покидает пункт осмотра необслуженной лишь в случае, когда в очереди на осмотр стоит более двух машин. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.

Задача 2. Анализируется работа междугородного переговорного пункта в небольшом городке. Пункт имеет три телефонных аппарата для переговоров. В среднем за сутки поступает 240 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров (с учетом вызова абонентов в другом городе) составляет 5 мин. Длина очереди не должна превышать 6 человек. Потоки заявок и обслуживаний — простейшие. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме.

Задача 3. На пункт автосервиса в среднем за час приезжает три автомобиля. Групп обслуживания две. Среднее время обслуживания — 40 мин. Мест для ожидания обслуживания — два. Время работы пункта — 12 ч. Стоимость обслуживания — 140 руб. Провести анализ работы СМО. Оценить потерю выручки из-за отказа в обслуживании.

Решения и ответы

Задача 1.

Многоканальная СМО с ограниченной очередью.

$n = 2$; $m = 3$; $\lambda = 1,5(1/4)$; $\bar{t}_{\text{ос}} = 0,5(\text{ч})$; $\mu = 2(1/4)$; $\rho = 0,75$.

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3 \left(1 - \left(\frac{\rho}{2} \right)^3 \right)}{2 \cdot 2! (1 - \frac{\rho}{2})} \right)^{-1} = \left(1 + 0,75 + \frac{0,75^2}{2!} + \frac{0,75^3 \left(1 - \left(\frac{0,75}{2} \right)^3 \right)}{2 \cdot 2! (1 - \frac{0,75}{2})} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + 0,75 + 0,28125 + 0,1055 \cdot \frac{0,947266}{0,625} \right)^{-1} = 2,1911^{-1} \approx 0,456;$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 = \frac{0,75^{2+3}}{2^3 2!} 0,456 \approx 0,00676;$$

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (\rho/n)^m}{1 - \rho/n} p_0 = \frac{0,75^3 \left(1 - \left(0,75/\frac{1}{2}\right)^3\right)}{2 \cdot 2! (1 - 0,75/\frac{1}{2})} 0,456 = 0,072892 \approx 0,0729;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 0,99324 \approx 0,993; \quad A = \lambda Q = 1,5 \cdot 0,99 \approx 1,485;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n! n} \cdot \frac{1 - (\rho/n)^m (m+1 - m(\rho/n))}{(1 - \rho/n)^2} p_0 = \frac{0,75^3 \left(1 - \left(0,75/\frac{1}{2}\right)^3 (4 - 3 \cdot 0,75/\frac{1}{2})\right)}{2! 2 (1 - 0,75/\frac{1}{2})^2} 0,456 \approx 0,104;$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,104}{1,5} = 0,069 \text{ (ч)};$$

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{1,485}{2} = 0,7425; \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{0,7425}{1,5} = 0,495 \text{ (ч)};$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = 0,104 + 0,7425 = 0,8465; \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{0,8465}{1,5} \approx 0,564 \text{ (ч)};$$

$$k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{0,7425}{2} \approx 0,371.$$

$$\text{Ответ. } P_{\text{отк}} \approx 0,007; \quad P_{\text{оч}} \approx 0,073; \quad Q \approx 0,993; \quad A \approx 1,485;$$

$$L_{\text{оч}} \approx 0,104; \quad T_{\text{оч}} \approx 0,069 \text{ (ч)}; \quad L_{\text{об}} \approx 0,743; \quad T_{\text{об}} \approx 0,495 \text{ (ч)};$$

$$L_{\text{сист}} \approx 0,847; \quad T_{\text{сист}} \approx 0,564 \text{ (ч)}; \quad k_{\text{заг}} \approx 0,371.$$

Задача 2.

Многоканальная СМО с ограниченной очередью.

$$n = 3; \quad m = 6; \quad \lambda = \frac{1}{6} (\text{1/мин}); \quad \bar{t}_{\text{об}} = 5 (\text{мин}); \quad \mu = \frac{1}{5} (\text{1/мин}); \quad \rho = \frac{5}{6} \approx 0,833.$$

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4 \left(1 - (\rho/\frac{1}{3})^6\right)}{3 \cdot 3! (1 - \rho/\frac{1}{3})} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{5^2}{2! 6^2} + \frac{5^3}{3! 6^3} + \frac{5^4 \left(1 - (\frac{5}{18})^6\right)}{3 \cdot 3! 6^4 (1 - \frac{5}{18})} \right)^{-1} = 0,432;$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 = \frac{5^{3+6}}{6^{3+6} 3^6 3!} 0,432 = 0,000019;$$

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (\rho/n)^m}{1 - \rho/n} p_0 = \frac{5^4 \left(1 - (\frac{5}{18})^6\right)}{6^4 3 \cdot 3! (1 - \frac{5}{18})} 0,432 = 0,016;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 0,999981 \approx 1; \quad A = \lambda Q = \frac{1}{6} \approx 0,167;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n! n} \cdot \frac{1 - (\rho/n)^m (m+1 - m(\rho/n))}{(1 - \rho/n)^2} p_0 = \frac{5^4 \left(1 - (\frac{5}{18})^6 (7 - 6 \cdot \frac{5}{18})\right)}{6^4 3! 3 (1 - \frac{5}{18})^2} 0,432 \approx 0,0221;$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,0221}{1/6} = 0,1326 \text{ (мин)};$$

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = \frac{5}{6} \approx 0,833; \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{5/6}{1/6} = 5 \text{ (мин)};$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = 0,0221 + 0,8333 \approx 0,8554;$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{0,8554}{1/6} \approx 5,1324 \text{ (мин)}; \quad k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{0,833}{3} = 0,278.$$

$$\text{Ответ. } P_{\text{отк}} \approx 0,00002; \quad P_{\text{оч}} \approx 0,016; \quad Q \approx 1; \quad A \approx 0,167;$$

$$L_{\text{оч}} \approx 0,022; \quad T_{\text{оч}} \approx 0,133 \text{ (мин)}; \quad L_{\text{об}} \approx 0,833; \quad T_{\text{об}} = 5 \text{ (мин)};$$

$$L_{\text{сист}} \approx 0,855; \quad T_{\text{сист}} \approx 5,132 \text{ (мин)}; \quad k_{\text{заг}} \approx 0,278.$$

Задача 3.

Многоканальная СМО с ограниченной очередью.

$$n = 2; \quad m = 2; \quad \lambda = 3(\frac{1}{4}); \quad \bar{t}_{\text{об}} = 40 \text{ (мин)} = \frac{2}{3} \text{ (ч)}; \quad \mu = \frac{3}{2}(\frac{1}{4}); \quad \rho = 2; \quad \frac{\rho}{n} = 1.$$

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!}\right)^{-1} = (1 + 2 + 2 + 2 + 2)^{-1} = \frac{1}{9},$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2p_0 = \frac{2}{9} \approx 0,222;$$

$$P_{\text{отк}} = 2p_0 = \frac{2}{9} \approx 0,222; \quad P_{\text{оч}} = 2 \cdot \frac{2^2}{2!} p_0 = \frac{4}{9} \approx 0,444;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \approx 0,778; \quad A = \lambda Q = 3 \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{3} \approx 2,333;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2!} p_0 = \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \approx 0,667;$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9} \approx 0,222 \text{ (ч)};$$

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = \frac{14}{9} \approx 1,556; \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{14}{9 \cdot 3} = \frac{14}{27} \approx 0,519 \text{ (ч)};$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = \frac{14}{9} + \frac{2}{3} = \frac{20}{9} \approx 2,222;$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{20}{9 \cdot 3} = \frac{20}{27} \approx 0,741 \text{ (ч)}; \quad k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{14}{9 \cdot 2} = \frac{7}{9} \approx 0,778.$$

Среднее число потерянных заявок равно

$$k_{\text{пот}} = \lambda P_{\text{отк}} = \lambda - A = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3};$$

Потеря выручки за 12 ч работы $S = C \cdot k_{\text{пот}} \cdot t = 140 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 1120$ руб.

Здесь $C = 140$ — стоимость обслуживания одной машины, $t = 12$ (ч) — продолжительность рабочего времени за сутки.

Ответ. Потеря выручки за 12 ч работы составляет 1120 руб.

8. СМО с ограничением на время ожидания в очереди

Будем рассматривать систему массового обслуживания, у которой нет ограничения на длину очереди, но ограничено среднее время пребывания заявки в очереди. Заявка покидает систему необслуженной, если среднее время ожидания в очереди ($T_{\text{оч}}$) превышает некоторое заданное постоянное число $T_{\text{ож}}$ ($T_{\text{оч}} \leq T_{\text{ож}}$). В простейшей модели систем такого типа предполагают, что заявки покидают очередь в случайные моменты времени, т. е. возникает поток «уходов» заявок из очереди с постоянной интенсивностью

$$\omega = \frac{1}{T_{\text{ож}}}.$$

Этот поток считают пуассоновским, следовательно, процесс, протекающий в системе под влиянием такого потока, будет марковским.

Таким образом, каждая заявка, стоящая в очереди, может покинуть систему, не дождавшись обслуживания, в случайный

момент времени, распределенный по показательному закону, с интенсивностью ω . Заявки, в этом случае, называют «нетерпеливыми», а СМО — системой с «нетерпеливыми» заявками. Такая СМО имеет три простейших потока, влияющих на состояния системы: поток заявок с интенсивностью λ , поток обслуживаний с интенсивностью μ и поток заявок, покидающих очередь, с интенсивностью ω . Также имеется поток обслуженных заявок, покидающих систему с интенсивностью ν .

8.1. Многоканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками

Рассмотрим СМО, имеющую n каналов обслуживания и ограничение на время ожидания в очереди. Ограничения на длину очереди нет.

Состояния системы будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе:

S_0 — система свободна, т. е. каналы не заняты, очереди нет;

S_1 — один канал занят, обслуживается одна заявка, очереди нет;

S_2 — заняты два канала, обслуживаются две заявки, очереди нет; ...;

S_n — все n каналов заняты обслуживанием заявок, очереди нет;

S_{n+1} — все n каналов заняты обслуживанием, в очереди стоит одна заявка; ...;

S_{n+r} — n каналов заняты обслуживанием, в очереди стоят r заявок; и т. д.

Поскольку очередь не ограничена по длине, система имеет бесконечное множество состояний.

Переход из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит под влиянием потока заявок с постоянной интенсивностью λ для любого значения $k = 0, 1, 2, \dots$

Переход из состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит под влиянием потока обслуживаний с интенсивностью $k\mu$ для значений от $k = n$ до $k = 1$, т. к. состояние S_k означает в этом случае, что заняты k каналов и каждый из них может освободиться с интенсивностью μ . Интенсивность общего потока освобождения одного канала в таком случае равна $k\mu$.

Переход из состояния S_{n+r} в состояние S_{n+r-1} для всех значений ($r = 1, 2, \dots$) происходит с интенсивностью $(n\mu + r\omega)$, поскольку происходит под влиянием двух потоков: потока освобождения одного из занятых n каналов с общей интенсивностью $n\mu$ и потока «ухода» одной из r заявок, стоящих в очереди, из-за продолжительности ожидания обслуживания с суммарной интенсивностью $r\omega$. Поэтому переход из состояния S_{n+1} в состояние S_n происходит с интенсивностью $(n\mu + \omega)$, из состояния S_{n+2} в состояние S_{n+1} происходит с интенсивностью $(n\mu + 2\omega)$, из состояния S_{n+r+1} в состояние S_{n+r} — с интенсивностью $(n\mu + (r+1)\omega)$.

Построим размеченный граф состояний СМО (рис. 29).

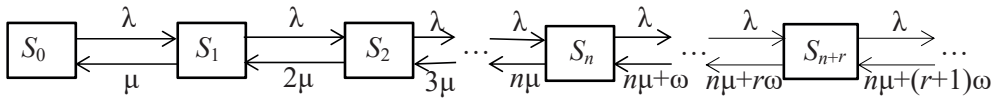


Рис. 29

Введем величину $\beta = \omega/\mu$ — приведенную интенсивность потока «уходов» заявок из очереди, т.е. среднее число «уходов» из очереди необслуженных заявок за среднее время обслуживания одной заявки:

$$\beta = \frac{\omega}{\mu} = \omega \bar{t}_{\text{об}}.$$

Тогда $n\mu + r\omega = (n + r\beta)\mu$ и $\frac{\lambda}{n\mu + r\omega} = \frac{\lambda}{\mu(n + r\beta)} = \frac{\rho}{n + r\beta}$.

Система работает по схеме гибели и размножения. Найдём формально p_0 .

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n+\beta)} + \frac{\rho^{n+2}}{n!(n+\beta)(n+2\beta)} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n!(n+\beta)\dots(n+m\beta)} + \dots \right)^{-1},$$

т.е.

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+m\beta)} \right)^{-1}.$$

Для существования p_0 необходима сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+m\beta)}.$$

Это ряд с положительными членами. Исследуем его с помощью признака Даламбера:

$$d = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m}, \text{ где}$$

$$a_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}}{(n+\beta)\dots(n+m\beta)(n+(m+1)\beta)}, \quad a_m = \frac{\rho^m}{(n+\beta)\dots(n+m\beta)}.$$

Итак,

$$d = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho}{n+(m+1)\beta} = 0 < 1,$$

следовательно, по признаку Даламбера этот ряд сходится. Это значит, что существуют предельные вероятности состояний СМО при любых положительных значениях n , ρ и β . Следовательно, со временем (теоретически при $t \rightarrow \infty$) устанавливается стационарный режим работы СМО.

Предельные вероятности остальных состояний системы получим по формулам:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \\ p_{n+m} &= \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho^m}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+m\beta)} p_0, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Их можно найти, зная значение p_0 . Для вычисления p_0 нужно найти сумму сходящегося ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+m\beta)}.$$

Ее найдем приближенно с необходимой точностью, взяв первые $(r-1)$ членов ряда. Оценим сумму исследуемого ряда, отбросив в знаменателях членов ряда все слагаемые n и увеличив тем самым все слагаемые и всю сумму.

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta)\dots(n+m\beta)} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{\beta \cdot 2\beta \cdot \dots \cdot m\beta} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{m! \beta^m} < \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m! \beta^m}.$$

Последний ряд является разложением в степенной ряд функции e^x при $x = \frac{\rho}{\beta}$:

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{x^r}{r!} e^{\theta x}, \quad (0 < \theta < 1).$$

Здесь остаток ряда $\sum_{m=r}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = \frac{x^r}{r!} e^{\theta x}$ после r его членов записан в форме Лагранжа. Взяв максимальное значение $\theta = 1$, получаем оценку этого остатка:

$$\frac{x^r}{r!} e^{\theta x} < \frac{x^r}{r!} e^x.$$

Вернемся к исследуемому ряду. Возьмем первые $r - 1$ членов ряда

$$S_{r-1} = \sum_{m=1}^{r-1} \frac{\rho^m}{(n+\beta) \dots (n+m\beta)}$$

и оценим остаток

$$\Delta_r = \sum_{m=r}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta) \dots (n+m\beta)} < \sum_{m=r}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^m = \frac{1}{r!} \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^r e^{\frac{\rho}{\beta}} < \frac{1}{r!} \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^r e^{\frac{\rho}{\beta}}.$$

Итак,

$$\Delta_r = S - S_{r-1} \leq \frac{1}{r!} \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^r e^{\frac{\rho}{\beta}}$$

для любого значения $r > 1$.

Заметим, что $\frac{1}{r!} \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^r$ как общий член сходящегося ряда стремится

к нулю при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, и $\frac{1}{r!} \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^r e^{\frac{\rho}{\beta}} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Задав необходимую точность ε вычисления суммы ряда, из неравенства

$$\boxed{\frac{1}{r!} \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^r e^{\frac{\rho}{\beta}} \leq \varepsilon}$$

определим число r и количество $r - 1$ членов ряда для отыскания его суммы с необходимой точностью.

Найдем характеристики эффективности работы данной СМО.

Ограничений на длину очереди в рассматриваемой системе нет, поэтому каждая заявка, поступившая во входящем потоке, будет принята

в систему. Таким образом, вероятность принятия заявки в систему $P_{\text{сист}} = 1$, и в этом смысле отказ со стороны системы заявка не получит, т.е. $P_{\text{отк}} = 0$. Но в нашем случае заявки «нетерпеливые» и могут сами покинуть систему, не дождавшись обслуживания, значит, не каждая поступившая (и принятая в систему) заявка будет обслужена. Следовательно, для систем данного типа вероятность заявке быть обслуженной $P_{\text{об}} = Q \neq 1 - P_{\text{отк}}$. Рассмотрим вероятность «ухода» заявки из очереди $P_{\text{ух}}$. Она равна доле пришедших в систему и не дождавшихся обслуживания заявок: $P_{\text{ух}} = 1 - P_{\text{об}}$. Среднее число заявок, находящихся в очереди, можно искать как математическое ожидание числа таких заявок:

$$L_{\text{оч}} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_{n+k} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \rho^k}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+k\beta)}.$$

По признаку Даламбера стоящий в формуле ряд сходится:

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{\rho}{n+(k+1)\beta} = 0 < 1.$$

Это означает, что очередь имеет конечную длину, точнее, что среднее число заявок, стоящих в очереди, конечно. Каждая заявка может покинуть очередь с интенсивностью ω . Отсюда следует, что суммарный поток покидающих очередь заявок в среднем состоит из $L_{\text{оч}}$ потоков, каждый с интенсивностью ω , и имеет суммарную интенсивность $\nu_{\text{ух}} = L_{\text{оч}} \cdot \omega$. Таким образом, из среднего числа заявок в очереди ($L_{\text{оч}}$) уйдут необслуженными $\omega L_{\text{оч}}$ заявок, а остальные будут обслужены. Следовательно, среднее число заявок, обслуживаемых системой за единицу времени (абсолютная пропускная способность СМО) равно разности между средним числом входящих в систему за единицу времени заявок (λ) и средним числом покидающих систему необслуженных заявок за то же время:

$$A = \lambda - \omega L_{\text{оч}}.$$

Имея в виду, что

$$Q = P_{\text{об}} = 1 - P_{\text{ух}} = \frac{A}{\lambda},$$

найдем относительную пропускную способность системы

$$Q = 1 - \frac{\omega}{\lambda} L_{\text{оч}}.$$

Вероятность того, что заявка будет обслужена, также равна

$$P_{об} = 1 - \frac{\omega}{\lambda} L_{оч}.$$

Вероятность ухода заявки необслуженной из-за превышения допустимого времени пребывания в очереди равна

$$P_{ух} = 1 - P_{об} = \frac{\omega}{\lambda} L_{оч},$$

или, имея в виду формулу Литтла:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}, \text{ получим } P_{ух} = \omega T_{оч}.$$

Это значит, что вероятность покидания заявкой очереди, равна среднему числу покидающих очередь заявок за среднее время пребывания заявки в очереди. Эта величина не может быть больше единицы.

Найдем среднее число занятых каналов, равное среднему числу заявок, находящихся под обслуживанием. С одной стороны, мы можем использовать общие формулы связи показателей:

$$\bar{k} = L_{об} = \frac{A}{\mu} = \rho Q,$$

тогда получим:

$$\bar{k} = L_{об} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = \rho \left(1 - \frac{\omega}{\lambda} L_{оч} \right) = \rho - \frac{\omega}{\mu} L_{оч},$$

а т. к. $\frac{\omega}{\mu} = \beta$, то

$$\bar{k} = L_{об} = \rho - \beta L_{оч}.$$

С другой стороны, найдем среднее число занятых каналов как математическое ожидание случайной величины, принимающей значения числа таких каналов. Это сумма произведений числа занятых каналов на вероятность состояния системы с таким числом занятых каналов и в случае, когда все n каналов заняты, произведение n на сумму вероятностей всех остальных состояний системы:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^n k p_k + n \sum_{k=1}^{\infty} p_{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} k p_k + n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} k p_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k \right).$$

В более компактной форме получим:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n-1} k p_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k \right) = n - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = n - \sum_{k=0}^n (n-k) p_k.$$

Итак, среднее число занятых каналов можно найти, используя одну из двух формул:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n-1} k p_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k \right),$$

или

$$\bar{k} = n - \sum_{k=0}^n (n-k) p_k.$$

Теперь из ранее полученной формулы для среднего числа занятых каналов имеем: $\beta L_{\text{оч}} = \rho - \bar{k}$ и

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho - \bar{k}}{\beta}, \quad \omega L_{\text{оч}} = \lambda - \mu \bar{k}.$$

Все остальные показатели эффективности системы вычислим через найденное значение $\bar{k}$.

$$L_{\text{об}} = \bar{k}, \quad A = \mu \bar{k}, \quad Q = \frac{\bar{k}}{\rho}, \quad P_{\text{об}} = Q, \quad P_{\text{yx}} = 1 - \frac{\bar{k}}{\rho}, \quad v_{\text{yx}} = \lambda - \mu \bar{k}.$$

Среднее число заявок в системе найдем как сумму $L_{\text{оч}}$ и $L_{\text{об}}$:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = \frac{\rho - \bar{k}}{\beta} + \bar{k} = \frac{\rho + (\beta - 1)\bar{k}}{\beta}.$$

Таким образом,

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho + (\beta - 1)\bar{k}}{\beta}.$$

Используя формулы Литтла, найдем среднее время пребывания заявки в очереди, под обслуживанием и в системе.

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{\rho - \bar{k}}{\lambda \beta} = \frac{1 - Q}{\omega}, \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\lambda}, \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{\rho + (\beta - 1)\bar{k}}{\lambda \beta}.$$

Вероятность наличия очереди получим как сумму вероятностей состояний системы (состояния несовместные) при наличии заявок в очереди:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{n+k} = 1 - \sum_{k=0}^n p_k = 1 - p_0 \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}.$$

Отметим еще раз, что для систем с «нетерпеливыми» заявками, в отличие от СМО с «терпеливыми» заявками,

$$\begin{aligned} Q &\neq 1 - P_{\text{отк}}, \quad P_{\text{об}} \neq 1 - P_{\text{отк}}, \quad P_{\text{сист}} \neq P_{\text{об}}, \\ P_{\text{сист}} &= 1, \quad P_{\text{отк}} = 0, \quad Q = P_{\text{об}}, \end{aligned}$$

Вернемся к формуле для вычисления p_0 :

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+m\beta)} \right)^{-1}.$$

Оценим заново стоящий в формуле ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+m\beta)},$$

отбрасывая теперь у всех членов ряда в знаменателе все слагаемые, содержащие β . Поскольку $\beta \geq 0$, то все члены ряда могут только увеличиться:

$$\frac{\rho^m}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+m\beta)} \leq \left(\frac{\rho}{n} \right)^m$$

для всех $\beta \geq 0$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta)(n+2\beta)\dots(n+m\beta)} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n} \right)^m.$$

Это значит, что у исследуемого ряда существует мажорирующий ряд, который сходится при условии $\rho/n < 1$ (как сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Это, в свою очередь, означает, что исходный ряд сходится равномерно относительно $\beta \in (0, +\infty)$. Отсюда следует, что возможен почленный переход к пределу по β в сумме ряда, т. е. в этих условиях предел суммы ряда равен сумме пределов его членов.

Перейдем к пределу при $T_{\text{ож}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow 0$ (при условии $\rho/n < 1$) в формуле для p_0 .

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow 0} p_0 &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta) \dots (n+m\beta)} \right)^{-1} = \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\rho^m}{(n+\beta) \dots (n+m\beta)} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{n^m} \right)^{-1} = \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho/n}{1-\rho/n} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Мы получили значение предельной вероятности p_0 состояния S_0 многоканальной СМО с неограниченной очередью и неограниченным временем ожидания в ней, остальные характеристики также будут соответствовать этой СМО, т. к. однозначно определяются значением p_0 .

Значит, в пределе при $T_{\text{ож}} \rightarrow +\infty$ и выполнении условия $\rho/n < 1$ получается ранее рассмотренная многоканальная СМО с неограниченной очередью, что и должно было произойти с содержательной точки зрения, когда допустимое время ожидания в очереди становится неограниченным, а заявки из очереди фактически не уходят.

Перейдем теперь к пределу при $T_{\text{ож}} \rightarrow +0 \Rightarrow \omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \beta \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow +\infty} p_0 &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta) \dots (n+m\beta)} \right)^{-1} = \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta) \dots (n+m\beta)} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} 0 \right)^{-1} = \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot 0 \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

В этом случае мы получили n -канальную СМО с отказами, что и должно было случиться, если допустимое время ожидания в очереди равно нулю.

8.2. Одноканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками

Случай одноканальной СМО с ограничением на время ожидания в очереди рассмотрим как частный вариант многоканальной СМО того же типа.

В полученные формулы подставим значение $n = 1$.

В результате имеем:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(1+\beta)(1+2\beta)\dots(1+m\beta)} \right)^{-1}.$$

Сумму ряда, стоящего в формуле, найдем приближенно, так же как в случае многоканальной СМО: по заданной точности расчетов ε определим r и в качестве суммы ряда возьмем сумму первых $r - 1$ членов ряда.

Предельные вероятности остальных состояний системы равны:

$$p_1 = \rho p_0,$$

$$p_{1+m} = \frac{\rho^{m+1}}{(1+\beta)(1+2\beta)\dots(1+m\beta)} p_0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Вероятность приема заявки в систему:

$$P_{\text{сист}} = 1.$$

Вероятность отказа заявке в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = 0.$$

Вероятность наличия в системе очереди:

$$P_{\text{оч}} = 1 - p_0(1 + \rho).$$

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = 1 - p_0.$$

Абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \mu \bar{k} = \mu(1 - p_0).$$

Относительная пропускная способность системы:

$$Q = \frac{\bar{k}}{\rho} = \frac{1 - p_0}{\rho}.$$

Вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$P_{\text{об}} = Q = \frac{1 - p_0}{\rho}.$$

Вероятность «ухода» заявки из очереди необслуженной:

$$P_{\text{yx}} = 1 - Q = 1 - \frac{1 - p_0}{\rho}.$$

Интенсивность потока покидающих очередь заявок:

$$v_{yx} = \lambda - A = \lambda - \mu(1 - p_0).$$

Интенсивность потока обслуженных заявок, покидающих систему:

$$v = A = \mu(1 - p_0).$$

Среднее число заявок, находящихся на обслуживании:

$$L_{об} = \bar{k} = 1 - p_0.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho - \bar{k}}{\beta} = \frac{\rho - (1 - p_0)}{\beta}.$$

Среднее число заявок, находящихся в системе:

$$L_{сист} = \frac{\rho + (\beta - 1)(1 - p_0)}{\beta}.$$

Среднее время, проводимое заявкой на обслуживании, в очереди и в системе, находим по формулам Литтла:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{\rho - \bar{k}}{\lambda\beta} = \frac{1 - Q}{\omega},$$

$$T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\lambda} = \frac{Q}{\mu},$$

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = \frac{1 - Q}{\omega} + \frac{Q}{\mu}.$$

Задачи для проработки теоретического материала [1]

Задача 1. В системе ПВО имеются две пусковые установки и специальные станции слежения, которые осуществляют наблюдение за самолетами, влетевшими в зону обстрела в момент, когда пусковые установки заняты обстрелом самолетов, появившихся в зоне ранее. Как только освобождается одна из установок, станция слежения «передает» ей самолет на обстрел при условии, что самолет еще находится в зоне обстрела.

Определить основные характеристики эффективности данной СМО, если интенсивность, с которой каждая установка обстреливает самолет, равна одному самолету в минуту, а интенсивность, с которой самолеты влетают в зону, равна 0,8 самолетов в мин. Время, в течение которого самолет находится в зоне до начала его обстрела, в среднем равно 2 мин.

Задача 2. С целью увеличения дальности беспосадочного полета производится дозаправка самолетов горючим в воздухе. В районе дозаправки постоянно дежурят два самолета дозаправщика. Время дозаправки одного самолета составляет в среднем около 10 мин. Если оба дозаправщика заняты, то самолет, нуждающийся в дозаправке, некоторое время может «ожидать» (совершать полет по кругу в районе дозаправки). Среднее время ожидания — 20 мин. Самолет, не дождавшийся дозаправки, вынужден садиться на запасной аэродром. Интенсивность полетов такова, что в среднем за час в район дозаправки прибывает 12 самолетов.

Определить:

- 1) вероятность того, что самолет будет дозаправлен;
- 2) среднее число занятых дозаправщиков;
- 3) среднее число самолетов в очереди;
- 4) среднее число самолетов под обслуживанием;
- 5) среднее время, проводимое самолетом в очереди;
- 6) среднее время, проводимое самолетом в процессе дозаправки;
- 7) среднее время, проводимое самолетом в процессе ожидания и самой дозаправки;
- 8) абсолютную пропускную способность системы дозаправки;
- 9) относительную пропускную способность системы дозаправки.

Задача 3. Передвижной ларек-кафе, где продаются кофе, коктейли, напитки и легкие закуски в местах массового скопления людей, обслуживается одним продавцом. Хронометраж работы ларька позволил установить, что в праздничные/выходные дни посетители подходят к нему в среднем каждые 15 мин, среднее время обслуживания посетителя продавцом составляет 12 мин, если образуется очередь, то клиенты ждут, как правило, не более 10 мин, а затем отправляются на поиски других пунктов питания. Средний доход от одного заказа составляет 200 руб.

Определить основные характеристики работы ларька и средние потери дохода в результате ухода клиентов из очереди.

Решения и ответы

Задача 1.

Моделью данной системы является многоканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками. Параметры системы:

- число каналов обслуживания $n = 2$;
- интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 0,8$ (самолетов в мин);
- интенсивность потока обслуживаний $\mu = 1$ (самолетов в мин);
- среднее время, ограничивающее пребывание заявки в очереди, $T_{\text{ож}} = 2$ мин и, следовательно, интенсивность потока уходов $\omega = 1/T_{\text{ож}} = 0,5$ (самолетов в мин).

Определяем нагрузку системы $\rho = \lambda/\mu = 0,8/1 = 0,8$ (эрланга) и приведенную интенсивность потока «уходов» $\beta = \omega/\mu = 0,5$.

Найдем характеристики системы.

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot S \right)^{-1} = \left(1 + 0,8 + \frac{0,8^2}{2!} + \frac{0,8^2}{2!} \cdot S \right)^{-1},$$

где S — сумма бесконечного сходящегося ряда, т. е. для исходных данных задачи:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,8^k}{(2+0,5)(2+2 \cdot 0,5) \cdot \dots \cdot (2+k \cdot 0,5)}.$$

Найдем сумму S с точностью до $\varepsilon = 0,01$. Для этого используем оценку, которая для числовых значений данной задачи приобретает вид

$$\left(\frac{0,8}{0,5} \right)^r \cdot \frac{e^{\frac{0,8}{0,5}}}{r!} \leq 0,01,$$

$$\text{или } \frac{(1,6)^r}{r!} \leq \frac{0,01}{4,953} = 0,002.$$

Найдем наименьшее натуральное $r \geq 2$, удовлетворяющее данному неравенству. Вычисленные значения отношения $\frac{(1,6)^r}{r!}$ представлены ниже:

r	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{(1,6)^r}{r!}$	1,28	0,683	0,273	0,087	0,023	0,005	0,001

Таким образом, наименьшее целое положительное $r \geq 2$, удовлетворяющее неравенству, равно 8. Поэтому в качестве приближенного значения суммы S ряда с точностью до $\varepsilon = 0,01$ можно взять сумму S_7 первых семи его членов. Обозначим члены этого ряда через a_k . Значит,

$$S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7,$$

где

$$a_1 = 0,8/(2 + 0,5) = 0,32;$$

$$a_2 = 0,8^2/((2 + 0,5)(2 + 2 \cdot 0,5)) = 0,085;$$

$$a_3 = 0,8^3/((2 + 0,5)(2 + 2 \cdot 0,5)(2 + 3 \cdot 0,5)) = 0,020;$$

$$a_4 = 0,8^4/((2 + 0,5)(2 + 2 \cdot 0,5)(2 + 3 \cdot 0,5)(2 + 4 \cdot 0,5)) = 0,004;$$

$$a_5 = 0,8^5/((2 + 0,5)(2 + 2 \cdot 0,5)(2 + 3 \cdot 0,5)(2 + 4 \cdot 0,5)(2 + 5 \cdot 0,5)) = 0,0007;$$

$$a_6 = 0,8^6/((2 + 0,5)(2 + 2 \cdot 0,5)(2 + 3 \cdot 0,5)(2 + 4 \cdot 0,5)(2 + 5 \cdot 0,5)(2 + 6 \cdot 0,5)) = 0,0001;$$

$$a_7 = 0,8^7/((2 + 0,5)(2 + 2 \cdot 0,5)(2 + 3 \cdot 0,5)(2 + 4 \cdot 0,5)(2 + 5 \cdot 0,5) \times (2 + 6 \cdot 0,5)(2 + 7 \cdot 0,5)) = 0,00002.$$

Итак, $S \approx S_7 = 0,32 + 0,085 + 0,02 + 0,004 + 0,0007 + 0,0001 + 0,00002 = 0,42982 \approx 0,43$. Подставив найденное S в формулу для p_0 , получим значение p_0 :

$$p_0 = \left(1 + 0,8 + \frac{0,8^2}{2!} + \frac{0,8^2}{2!} \cdot S\right)^{-1} = \left(1 + 0,8 + \frac{0,8^2}{2!} + \frac{0,8^2}{2!} \cdot 0,43\right)^{-1} = 0,443.$$

Зная p_0 , определим p_1 и p_2 :

$$p_1 = 0,8 \cdot 0,443 = 0,354; p_2 = 0,8^2/2! \cdot 0,443 = 0,142.$$

Вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{оч}} = 0,8^2/2! \cdot 0,43 \cdot 0,443 = 0,061.$$

По-другому,

$$P_{\text{оч}} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - (0,443 + 0,354 + 0,142) = 0,061.$$

Теперь можно определить среднее число занятых каналов (среднее число заявок под обслуживанием):

$$\bar{k} = L_{об} = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot (1 - p_0 - p_1) = 0,354 + 2 \cdot (1 - 0,443 - 0,354) = 0,760.$$

Среднее число заявок в очереди можно вычислить по формуле:

$$L_{оч} = (\rho - \bar{k}) / \beta = (0,8 - 0,760) / 0,5 = 0,080.$$

Среднее число заявок в системе определяется как сумма

$$L_{сист} = L_{оч} + L_{об} = 0,08 + 0,76 = 0,84.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda - \omega \cdot L_{оч} = 0,8 - 0,5 \cdot 0,08 = 0,76.$$

Относительная пропускная способность:

$$Q = A / \lambda = 0,76 / 0,8 = 0,95.$$

Вероятность ухода заявки из очереди:

$$P_{yx} = 1 - Q = 1 - 0,95 = 0,05.$$

Интенсивность ухода заявок из очереди:

$$\nu_{yx} = \omega \cdot L_{оч} = 0,5 \cdot 0,08 = 0,04.$$

Найдем среднее время пребывания в очереди, под обслуживанием и в системе. Воспользуемся формулами Литтла:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{0,08}{0,8} = 0,1; \quad T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda} = \frac{0,76}{0,8} = 0,95; \quad T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = \frac{0,84}{0,8} = 1,05.$$

Ответ. При заданных параметрах 95 % поступающих заявок обслуживаются системой и только 5 % «нетерпеливых» заявок покидают ее необслуженными, т. е. 95 % самолетов, вошедших в зону обстрела, обстреливаются пусковыми установками, а 5 % самолетов выходят из зоны обстрела необстрелянными.

Задача 2.

Параметры системы:

число каналов обслуживания $n = 2$;

интенсивность входящего потока заявок ($\lambda = 12/60 = 0,2$ самолетов в мин);

среднее время обслуживания заявки — 10 мин, т. е. интенсивность $\mu = 0,1$;

среднее время, ограничивающее пребывание заявки в очереди, $T_{ож} = 20$ мин и, следовательно, интенсивность потока уходов $\omega = 1/T_{ож} = 0,05$ (самолетов в мин);

нагрузка системы $\rho = \lambda/\mu = 0,2/0,1 = 2$ (эрланга);
 приведенная интенсивность потока «уходов» $\beta = \omega/\mu = 0,5$.

Промежуточные результаты:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot S \right)^{-1} = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^2}{2!} \cdot S \right)^{-1},$$

где S — сумма бесконечного сходящегося ряда.

Следовательно,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2 + 0,5)(2 + 2 \cdot 0,5) \cdot \dots \cdot (2 + k \cdot 0,5)}.$$

В качестве приближенного значения суммы S ряда с точностью до $\varepsilon = 0,01$ нужно взять сумму S_{16} первых 16-ти его членов: $S \approx S_{16} \approx 1,90$:

$$p_0 = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^2}{2!} \cdot S \right)^{-1} = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^2}{2!} \cdot 1,90 \right)^{-1} \approx 0,114.$$

Ответ.

- 1) вероятность того, что самолет будет дозаправлен, $P_{об} = Q = 0,772$;
- 2) среднее число занятых дозаправщиков равно $\bar{k} = L_{об} = 1,544$;
- 3) среднее число самолетов в очереди равно $L_{оч} = 0,912$;
- 4) среднее число самолетов под обслуживанием равно $L_{об} = 1,544$;
- 5) среднее время, проводимое самолетом в очереди, равно $T_{оч} = 4,56$ мин;
- 6) среднее время в процессе дозаправки равно $T_{об} = 7,72$ мин;
- 7) среднее время, проводимое самолетом в процессе ожидания и самой дозаправки, равно $T_{сист} = 12,28$ мин;
- 8) абсолютная пропускная способность системы дозаправки — $A = 0,1544$;
- 9) относительная пропускная способность системы — $Q = 0,772$.

Таким образом, при заданных параметрах 77,2 % самолетов получают дозаправку в воздухе, а 22,8 % самолетов вынуждены садиться на запасной аэродром.

Задача 3.

Система — СМО с «нетерпеливыми» заявками.

$n=1, m=\infty, \bar{t}_{ож} = 15$ мин $= 1/4$ ч, $\bar{t}_{об} = 12$ мин $= 1/5$ ч, $T_{ож} = 10$ мин $= 1/6$ ч,

$C = 200$ руб.

Параметры:

$$\lambda = 1/\bar{t}_{\text{ож}} = 4, \mu = 1/\bar{t}_{\text{об}} = 5, \omega = 1/T_{\text{ож}} = 6, \rho = \lambda/\mu = 0,8, \beta = \omega/\mu = 1,2.$$

$$p_0 = (1 + \rho + \rho S)^{-1}, \text{ где } S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(1+\beta)(1+2\beta)\dots(1+m\beta)}.$$

Возьмем $\varepsilon = 0,01$ и оценим остаток ряда по формуле

$$\Delta_r < \frac{1}{r!} \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^r e^{\frac{\rho}{\beta}} \leq \varepsilon = 0,01. \quad \frac{\rho}{\beta} = \frac{0,8}{1,2} = \frac{2}{3} \approx 0,667; \quad e^{\frac{2}{3}} \approx e^{-0,667} \approx 0,513.$$

$$\frac{1}{r!} \left(\frac{2}{3} \right)^r \leq \varepsilon e^{\frac{2}{3}} = 0,01 e^{\frac{2}{3}} \approx 0,01 \cdot 0,513 = 0,00513.$$

Найдем r :

r	1	2	3	4	5
$\frac{1}{r!} \left(\frac{2}{3} \right)^r$	0,667	0,222	0,049	0,008	0,001

Итак, $r = 5$. Следовательно, нужно взять 4 члена этого ряда.

$$S_4 = \frac{0,8}{1+1,2} + \frac{0,8^2}{(1+1,2)(1+2 \cdot 1,2)} + \frac{0,8^3}{(1+1,2)(1+2 \cdot 1,2)(1+3 \cdot 1,2)} + \\ + \frac{0,8^4}{(1+1,2)(1+2 \cdot 1,2)(1+3 \cdot 1,2)(1+4 \cdot 1,2)} \approx 0,467.$$

$$\text{Тогда } p_0 = (1 + \rho + \rho S)^{-1} = (1 + 0,8 + 0,8 \cdot 0,467)^{-1} = 2,1736^{-1} \approx 0,460.$$

$$\text{Вероятность наличия очереди: } P_{\text{оч}} = \rho S p_0 = 0,8 \cdot 0,467 \cdot 0,460 \approx 0,172.$$

Пропускная способность:

$$\text{относительная: } Q = \frac{1 - p_0}{\rho} = \frac{1 - 0,460}{0,8} = \frac{0,54}{0,8} = 0,675,$$

$$\text{абсолютная: } A = \lambda Q = \mu(1 - p_0) = 5 \cdot 0,54 = 2,7.$$

$$\text{Вероятность ухода заявки из очереди: } P_{\text{yx}} = 1 - Q = 1 - 0,675 = 0,325.$$

Интенсивность ухода заявок из очереди:

$$v_{\text{yx}} = \lambda - \mu(1 - p_0) = \lambda - A = 4 - 2,7 = 1,3.$$

Среднее число заявок под обслуживанием, в очереди и в системе:

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = 1 - p_0 = 0,54; \quad L_{\text{оч}} = \frac{\rho - (1 - p_0)}{\beta} = \frac{0,8 - 0,54}{1,2} \approx 0,217;$$

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho + (\beta - 1)(1 - p_0)}{\beta} = \frac{0,8 + 0,2 \cdot 0,54}{1,2} \approx 0,757;$$

Среднее время, проводимое заявкой под обслуживанием, в очереди и системе:

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \frac{0,54}{4} = 0,135 \text{ ч} = 8,1 \text{ мин}, \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,217}{4} \approx 0,054 \text{ ч} = 3,24 \text{ мин},$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{0,757}{4} \approx 0,189 \text{ ч} = 11,34 \text{ мин},$$

Средний доход, получаемый за час работы:

$$Д = C \cdot A = 200 \cdot 2,7 = 540 \text{ руб.}$$

Средние потери дохода в результате ухода клиентов из очереди составляют (за час работы)

$$Д_{\text{пот}} = C \cdot v_{\text{yx}} = 200 \cdot 1,3 = 260 \text{ руб.}$$

Ответ. В результате недостаточной скорости обслуживания теряется примерно треть клиентов и, соответственно, треть возможного дохода.

9. Замкнутые системы массового обслуживания (системы Энгсета)

Рассмотрим системы, которые обслуживают только конечное число вполне определенных источников заявок. Эти источники время от времени возобновляют свои заявки на обслуживание. Такие источники целесообразно включить в саму систему. Подобные системы называют замкнутыми СМО, или системами Энгсета. Все источники заявок находятся внутри системы. Из внешних источников заявки в систему не поступают. Примером системы такого типа может служить цех с оборудованием — станками, которые требуют обслуживания (наладки, ремонта), и обслуживающая такой цех группа наладчиков.

Поскольку источники заявок включены в систему, интенсивность поступающих заявок зависит от состояния этих источников, т. е. от состояния самой системы.

9.1. Одноканальная замкнутая СМО

Исследуем сначала систему, имеющую один канал обслуживания и i источников заявок, каждый из которых порождает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Если канал занят, то поступившая заявка становится в очередь и ждет обслуживания. Источник, подавший заявку, может подать следующую заявку на обслуживание только в том случае, если поданная им предыдущая заявка уже обслужена. Таким образом, есть только два возможных состояния источника заявок:

- *активное* — когда источник заявок может подать очередную заявку на обслуживание, т. е. уже обслужена ранее поданная им последняя заявка;
- *пассивное* — когда последняя поданная им заявка еще не обслужена и либо стоит в очереди, либо находится на обслуживании, следовательно, подать следующую заявку такой источник не может.

Интенсивность общего потока заявок зависит от того, сколько источников в системе находятся в пассивном состоянии, т. е. от того, сколько заявок имеется в системе: в очереди и под обслуживанием. Каждый источник, подавший заявку и не получивший ее обратно обслуженной, находится в пассивном состоянии. Значит, интенсивность общего потока заявок зависит от состояний самой системы. Исследования показали: эта зависимость потока заявок от состояния самой СМО проявляется существенно при *конечном* и *небольшом* числе источников заявок. Если число источников достаточно велико, то практически интенсивность общего потока заявок перестает зависеть от состояния СМО.

В модели таких СМО состояния системы будем нумеровать по числу источников, находящихся в пассивном состоянии, или, говоря по-другому, по числу заявок, находящихся в системе, т. е. в очереди и под обслуживанием. Общее число этих состояний равно $i + 1$.

S_0 — все источники в активном состоянии, очереди нет, канал свободен;

S_1 — один источник находится в пассивном состоянии, канал занят — обслуживает поданную этим источником заявку, очереди нет;

S_2 — два источника находятся в пассивном состоянии, канал обслуживает одну из поданных заявок, другая заявка стоит в очереди; ...;

S_i — все источники в пассивном состоянии, одна заявка (поданная одним из источников) обслуживается, $i - 1$ заявка (поданные остальными источниками) ждут в очереди.

Размеченный граф состояний системы (рис. 30).

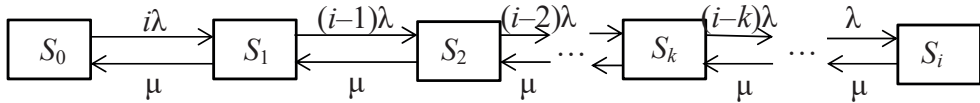


Рис. 30

Интенсивность потока обслуживаний обозначим, как обычно, μ .

Канал обслуживания один, он освобождается с интенсивностью μ . Это значит, что переход из любого состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит с одной и той же интенсивностью μ . Освобождение канала означает переход источника заявок, которому принадлежала обслуженная заявка, из пассивного состояния в активное. Если при этом имелась очередь, то одна заявка из очереди поступает в канал на обслуживание и очередь уменьшается на единицу.

Переход из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит под влиянием потока заявок, исходящего из источников, находящихся в активном состоянии. В состоянии системы S_0 все (i) источники — активны, каждый может подать заявку с интенсивностью λ , следовательно, суммарная интенсивность перехода системы из состояния S_0 в состояние S_1 равна $i\lambda$. В состоянии S_1 активны $(i - 1)$ источники. Один источник, заявка которого обслуживается, находится в пассивном состоянии. Интенсивность суммарного потока заявок в системе равна $(i - 1)\lambda$. С этой интенсивностью будет происходить переход системы из состояния S_1 в состояние S_2 . В общем случае, в состоянии S_k пассивны k источников заявок, остальные $(i - k)$ источники — активны. Следовательно, переход из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит в системе с интенсивностью суммарного потока заявок имеющих активных источников, равной $(i - k)\lambda$. Переход из состояния S_{i-1} , когда остался только один активный источник заявок, в состояние S_i происходит с интенсивностью λ .

Введем новые характеристики замкнутых СМО:

$N_{\text{пас}}$ — среднее число источников, находящихся в пассивном состоянии;

$N_{\text{акт}}$ — среднее число источников, находящихся в активном состоянии;

Λ — средняя интенсивность суммарного потока заявок;

$P_{\text{акт}}$ — вероятность того, что источник находится в активном состоянии.

Найдем предельную вероятность начального состояния системы S_0 .

$$p_0 = \left(1 + i\rho + i(i-1)\rho^2 + \dots + i!\rho^i\right)^{-1} = \left(1 + \frac{i!}{(i-1)!}\rho + \frac{i!}{(i-2)!}\rho^2 + \dots + \frac{i!}{0!}\rho^i\right)^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^i \frac{i!}{(i-k)!}\rho^k\right)^{-1} = \left(i! \sum_{k=0}^i \frac{\rho^k}{(i-k)!}\right)^{-1}.$$

Число состояний системы конечно, предельные вероятности всех состояний существуют. Найдено

$$p_0 = \left(i! \sum_{k=0}^i \frac{\rho^k}{(i-k)!}\right)^{-1}.$$

Найдем предельные вероятности остальных состояний СМО.

$$p_k = \frac{i!}{(i-k)!}\rho^k p_0, \quad k = 1, 2, \dots, i.$$

Вероятность того, что канал занят, найдем как разность единицы и вероятности того, что канал свободен:

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0.$$

Абсолютную пропускную способность системы будем искать как произведение вероятности того, что канал занят (т. е. долю времени, в течение которого канал занят обслуживанием заявки), и производительности канала μ , т. е. среднего числа заявок, которые может обслужить канал в единицу времени:

$$A = P_{\text{зан}}\mu = (1 - p_0)\mu.$$

В замкнутой СМО каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому относительная пропускная способность таких систем составляет 100 %:

$$Q = 1.$$

Вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$P_{\text{об}} = 1.$$

Интенсивность потока обслуженных заявок в замкнутых СМО, как и во всех других СМО, совпадает с абсолютной пропускной способностью системы:

$$v = A = (1 - p_0)\mu.$$

Среднее число заявок, находящихся в системе, равно среднему числу источников заявок, находящихся в пассивном состоянии:

$$L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}}.$$

Суммарный поток заявок, порождаемый активными источниками, имеет среднюю интенсивность, равную произведению среднего числа активных источников на интенсивность потока каждого такого источника, т. е.

$$\Lambda = \lambda N_{\text{акт}}.$$

Поскольку все заявки будут обслужены, средняя интенсивность потока заявок, т. е. среднее число поданных в единицу времени заявок, равна абсолютной пропускной способности системы:

$$\Lambda = A = (1 - p_0)\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda = A = v = \lambda N_{\text{акт}} = (1 - p_0)\mu,$$

и среднее число источников, находящихся в активном состоянии, равно

$$N_{\text{акт}} = \frac{(1 - p_0)\mu}{\lambda} = \frac{1 - p_0}{\rho}.$$

Среднее число источников, находящихся в пассивном состоянии, равно

$$N_{\text{пас}} = i - N_{\text{акт}} = i - \frac{1 - p_0}{\rho}.$$

Среднее число заявок, находящихся в системе:

$$L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = i - \frac{1 - p_0}{\rho}.$$

Заметим, что среднее число заявок, находящихся в системе, равное среднему числу источников, находящихся в пассивном состоянии, можно найти также по формуле математического ожидания:

$$L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = \sum_{k=0}^i k p_k.$$

По формуле математического ожидания найдем среднее число занятых каналов и равное ему среднее число заявок, находящихся под обслуживанием:

$$\bar{k} = L_{\text{об}} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 1 - p_0.$$

Таким образом,

$$\boxed{\bar{k} = 1 - p_0,}$$

$$\boxed{L_{\text{об}} = 1 - p_0.}$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди, найдем как разность среднего числа заявок, находящихся в системе, и среднего числа заявок, находящихся под обслуживанием:

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - L_{\text{об}} = i - \frac{1 - p_0}{\rho} - (1 - p_0) = i - (1 - p_0) \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right).$$

Итак,

$$\boxed{L_{\text{оч}} = i - (1 - p_0) \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right).}$$

Вероятность наличия очереди в системе можно найти как сумму вероятностей тех состояний системы, при которых существует очередь:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{k=2}^i p_k = \sum_{k=2}^i \frac{i!}{(i-k)!} \rho^k p_0 = i! p_0 \sum_{k=2}^i \frac{\rho^k}{(i-k)!},$$

или, что проще, как разность единицы и вероятности того, что очередь отсутствует (очередь отсутствует при состояниях системы S_0 и S_1):

$$\boxed{P_{\text{оч}} = 1 - p_0 - p_1.}$$

Вероятность того, что источник заявок находится в активном состоянии, можно найти как отношение среднего числа источников, находящихся в активном состоянии, к общему числу всех имеющихся источников заявок:

$$P_{\text{акт}} = \frac{N_{\text{акт}}}{i}.$$

С учетом того, что

$$N_{\text{акт}} = \frac{A}{\lambda} = \frac{\Lambda}{\lambda},$$

получим

$$P_{\text{акт}} = \frac{N_{\text{акт}}}{i} = \frac{A}{i\lambda} = \frac{\Lambda}{i\lambda}.$$

Эту вероятность называют также *стационарным коэффициентом активности (или готовности) источника заявок*.

Его можно найти еще и по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P_{\text{акт}} &= \sum_{k=0}^i \frac{i-k}{i} p_k = \sum_{k=0}^i \left(1 - \frac{k}{i}\right) p_k = \sum_{k=0}^i p_k - \frac{1}{i} \sum_{k=0}^i k p_k = 1 - \frac{1}{i} \sum_{k=0}^i k p_k = \\ &= 1 - \frac{1}{i} N_{\text{пас}} = 1 - \frac{1}{i} \left(i - \frac{1-p_0}{\rho} \right) = \frac{1-p_0}{i\rho} = \frac{(1-p_0)\mu}{i\lambda} = \frac{A}{i\lambda} = \frac{\Lambda}{i\lambda}, \end{aligned}$$

где $\frac{i-k}{i}$ — вероятность того, что при k -ом состоянии системы источник заявок активен.

В формулах Литтла в знаменателе стоит интенсивность входящего в систему потока заявок. В случае замкнутых систем поток заявок имеет меняющуюся в зависимости от состояния системы интенсивность потока. Поэтому в таких системах вместо интенсивности отдельного источника заявок, имеющего интенсивность λ , необходимо взять среднюю интенсивность суммарного потока заявок Λ . Формулы Литтла в случае замкнутых СМО получают следующий вид:

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\Lambda}, \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda}, \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda}.$$

Подставляя в эти формулы выведенные ранее значения, получаем

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\Lambda} = \frac{1-p_0}{(1-p_0)\mu} = \frac{1}{\mu} = \bar{t}_{\text{об}},$$

т. е. в замкнутых системах имеет место равенство

$$T_{\text{об}} = \bar{t}_{\text{об}},$$

и остальные показатели времени одноканальной замкнутой СМО тоже могут быть выражены через среднее время обработки одной заявки:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda} = \frac{i}{1-p_0} \bar{t}_{\text{об}} - \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right) \bar{t}_{\text{об}},$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda} = \frac{i}{1-p_0} \bar{t}_{\text{об}} - \frac{1}{\rho} \bar{t}_{\text{об}}.$$

Задачи для проработки теоретического материала [2]

Задача 1. Один наладчик обслуживает 6 автоматов. Интенсивность поломок каждого автомата равна одной поломке в час. Среднее время, которое тратит наладчик на ремонт одного автомата, равно 0,1 ч.

Определить:

- 1) вероятность того, что наладчик занят ремонтом автоматов;
- 2) абсолютную пропускную способность СМО;
- 3) относительную пропускную способность СМО;
- 4) среднее число неисправных автоматов (в ремонте и в очереди);
- 5) среднее число автоматов, ожидающих ремонта в очереди;
- 6) среднее число автоматов в ремонте;
- 7) среднее число исправных автоматов;
- 8) вероятность того, что автомат исправен;
- 9) вероятность того, что автомат неисправен;
- 10) вероятность наличия очереди автоматов, ожидающих ремонта;
- 11) среднее время, проводимое автоматом в очереди, под обслуживанием и в системе обслуживания.

Задача 2. В кооперативе по ловле рыбы имеется 4 катера, для ремонта которых используется один док, который может одновременно принять для ремонта только один катер. В среднем на ремонт одного катера уходит 0,25 мес. В течение месяца обычно выходят из строя 3 катера. Определить основные характеристики эффективности системы.

Задача 3. Один рабочий обслуживает группу из 4 станков. В среднем станок останавливается один раз в ч. Обслуживание одного станка занимает у рабочего в среднем 6 мин. Определить вероятность того, что не менее трех станков будет находиться в рабочем состоянии.

Задача 4. Компьютерный класс из 20 ЭВМ, имеющих длительный срок эксплуатации, обслуживает один оператор. В среднем за месяц

из строя выходит 10 машин. Ремонт одной ЭВМ занимает в среднем один рабочий день. Найти вероятность того, что в неисправном состоянии будет находиться половина машин компьютерного класса.

Задача 5. На аэродроме базируются 20 самолетов и находится один заправщик горючим. Заправка каждого самолета длится в среднем 30 мин. Каждый самолет совершает в среднем два вылета в сутки. После каждого полета самолет снова требует заправки.

Определить:

- 1) среднее число самолетов, заправляемых и ожидающих заправки;
- 2) среднее число самолетов, ожидающих заправки;
- 3) среднее время простоя самолета;
- 4) среднее время ожидания заправки.

Задача 6. Группа из 15 рыболовных траулеров обслуживается одной плавучей базой. База принимает на переработку рыбу и обеспечивает траулер необходимыми материалами. Среднее время плавания траулера — 5 сут. На базе имеется один причал. Среднее время обслуживания траулера равно 8 ч.

Определить среднее время простоя траулера, среднее время ожидания траулером обслуживания, среднее время простоя базы.

Решения и ответы

Задача 1.

Модель рассматриваемой системы массового обслуживания — одноканальная СМО замкнутого типа. Каждый автомат — источник заявок.

Параметры системы:

- число каналов ($n = 1$);
- число источников ($i = 6$);
- интенсивность потока заявок, порождаемого каждым источником ($\lambda = 1$);
- среднее время обслуживания одного автомата ($\bar{t}_{об} = 0,1$ ч);
- интенсивность потока обслуживаний ($\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{0,1} = 10$ автоматов/ч).

Зная λ и μ , найдем нагрузку (трафик) системы: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,1$ (эрланга).

Пусть k — число неисправных автоматов ($k \leq i$).

Вычисление предельных вероятностей состояний системы удобно проводить при помощи данных, приведенных в таблице (см. ниже).

Значения $k \leq i$	p_k/p_0	p_k	kp_k
0	1,000	0,4845	0
1	0,600	0,2907	0,2907
2	0,300	0,1454	0,2908
3	0,120	0,0581	0,1743
4	0,036	0,0174	0,0696
5	0,007	0,0034	0,017
6	0,001	0,0005	0,003
Σ	2,064	1,000	0,8454

Сначала производим вычисления во втором столбце по формуле

$$\frac{p_k}{p_0} = \rho^k \frac{i!}{(i-k)!},$$

полученной из формулы $p_k = \rho^k \frac{i!}{(i-k)!} p_0$, $k = 0, 1, 2, \dots, 6$.

Сумма элементов этого столбца равна p_0^{-1} .

Предельные вероятности p_k найдем, умножив элементы второго столбца на вероятность $p_0 = \left(\sum \frac{p_k}{p_0} \right)^{-1} = \frac{1}{2,064} \approx 0,4845$. Сумма элемен-

тов третьего столбца в соответствии с нормировочным условием (как вероятность достоверного события) должна быть равна $1 \pm \Delta$, где Δ — ошибка округления, которая в данном случае оказалась равной нулю.

Значения элементов четвертого столбца получаются умножением элементов первого столбца на соответствующие элементы третьего столбца.

Сумма элементов четвертого столбца равна среднему числу $N_{\text{пас}}$ неисправных автоматов (числу источников заявок, находящихся в пассивном состоянии): $N_{\text{пас}} = \Sigma kp_k \approx 0,845$.

Таким образом, получим следующие результаты.

1. Вероятность того, что наладчик занят ремонтом автоматов, равна $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - 0,4845 = 0,5155$.

2. Абсолютную пропускную способность СМО определяем по формуле:

$$A = \mu P_{\text{зан}} = 0,5155 \cdot 10 = 5,155 \text{ (автоматов в час)}.$$

3. Относительная пропускная способность $Q = 1$ для любых СМО замкнутого типа, поскольку рано или поздно наладчик починит вышедший из строя автомат.

Значение $N_{\text{пас}}$ можно получить и по более удобной для вычисления формуле, использующей из вероятностей состояний только p_0 :

$$N_{\text{пас}} = i - (1 - p_0) / \rho = 6 - 0,5155 / 0,1 = 0,845 \text{ (автоматов)}.$$

4. Среднее число неисправных автоматов (в ремонте и в очереди) равно среднему числу автоматов в системе и числу пассивных источников заявок: $L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = 0,845$.

5. Среднее число автоматов в очереди на ремонт определяем по формуле

$$L_{\text{оч}} = i - (1 - p_0)(1 + 1 / \rho) = 6 - 0,5155(1 + 1 / 0,1) = 0,3295.$$

6. Среднее число автоматов в ремонте можно получить по формуле

$$L_{\text{об}} = 1 - p_0 = 1 - 0,4845 = 0,5155,$$

или как разность

$$L_{\text{об}} = L_{\text{сист}} - L_{\text{оч}} = 0,845 - 0,3295 = 0,5155.$$

7. Среднее число исправных автоматов (источников заявок, находящихся в активном состоянии): $N_{\text{акт}} = i - N_{\text{пас}} = 6 - 0,845 = 5,155$.

Средняя интенсивность суммарного потока заявок, порожденных активными источниками заявок (работающими автоматами): $\Lambda = A = 5,155$.

8. Вероятность того, что автомат исправен, т. е. источник заявок находится в активном состоянии: $P_{\text{акт}} = \Lambda / (i\lambda) = 5,155 / 6 = 0,859$.

9. Вероятность того, что автомат неисправен (находится в ремонте или ожидает ремонта): $P_{\text{пас}} = 1 - P_{\text{акт}} = 1 - 0,859 = 0,141$.

10. Вероятность наличия очереди из неисправных автоматов:

$$P_{\text{оч}} = 1 - p_0 - p_1 = 1 - 0,4845 - 0,2907 = 0,2248.$$

11. Среднее время в очереди, на обслуживании и в системе автомат проводит соответственно:

$$T_{\text{оч}} = L_{\text{оч}} / \Lambda = 0,3295 / 5,155 \approx 0,064 \text{ ч} = 3,84 \text{ мин},$$

$$T_{\text{об}} = L_{\text{об}} / \Lambda = 0,5155 / 5,155 = 0,1 \text{ ч} = 6 \text{ мин},$$

$$T_{\text{сист}} = L_{\text{сист}} / \Lambda = 0,845 / 5,155 \approx 0,164 \text{ ч} = 9,84 \text{ мин.}$$

$$\text{Ответ. } P_{\text{зан}} \approx 0,516; A \approx 5,155; Q = 1; N_{\text{пас}} \approx 0,845; L_{\text{сист}} \approx 0,845;$$

$$L_{\text{оч}} \approx 0,330; L_{\text{об}} \approx 0,516; N_{\text{акт}} \approx 5,155; \Lambda \approx 5,155; P_{\text{акт}} \approx 0,859;$$

$$P_{\text{пас}} \approx 0,141; P_{\text{оч}} \approx 0,2248; T_{\text{оч}} \approx 3,84 \text{ мин}; T_{\text{об}} \approx 6 \text{ мин}; T_{\text{сист}} \approx 9,84 \text{ мин.}$$

Задача 2.

СМО — одноканальная замкнутая система с четырьмя источниками заявок. Параметры: $n = 1; i = 4; \lambda = 3; \bar{t}_{\text{об}} = 0,25; \mu = 4; \rho = 3/4 = 0,75$.

Решение проводится по той же схеме, что и в предшествующей задаче.

Ответ. Предельные вероятности состояний системы:

$$p_0 = 0,035; p_1 = 0,105; p_2 = 0,237; p_3 = 0,356; p_4 = 0,267.$$

Основные характеристики эффективности системы:

$$P_{\text{зан}} = 0,965; P_{\text{оч}} = 0,860; P_{\text{отк}} = 0; P_{\text{акт}} = 0,322;$$

$$A = 3,860; Q = 1; N_{\text{пас}} = 2,713; N_{\text{акт}} = 1,287;$$

$$L_{\text{об}} = 0,965; T_{\text{об}} = 0,25; L_{\text{сист}} = 2,713; T_{\text{сист}} = 0,703; L_{\text{оч}} = 1,748; T_{\text{оч}} = 0,453.$$

Задача 3.

Параметры системы:

$$n = 1, i = 4, \lambda = 1 \text{ заявка в час}, \bar{t}_{\text{об}} = 0,1 \text{ ч}, \mu = 10 \text{ заявок в час}, \rho = 0,1.$$

Определим вероятность того, что не менее трех станков будет находиться в рабочем состоянии.

$$p_0 = \left(1 + i\rho + i(i-1)\rho^2 + i(i-1)(i-2)\rho^3 + \dots + i!\rho^i \right)^{-1} = \\ = (1 + 4 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,01 + 24 \cdot 0,001 + 24 \cdot 0,0001)^{-1} \approx 0,647.$$

$$P(N_{\text{акт}} \geq 3) = p_0 + p_1 = 0,647 (1 + 0,4) = 0,9058.$$

$$\text{Ответ. } P(N_{\text{акт}} \geq 3) \approx 0,906.$$

Задача 4.

Параметры системы:

$$n = 1, i = 20, \bar{t}_{\text{об}} = 1 \text{ день}, \mu = 1 \text{ заявка в день}.$$

Будем считать, что в месяце 25 рабочих дней.

$$\text{Тогда } \lambda = 10/25 = 0,4 \text{ заявки в день}, \rho = 0,4/1 = 0,4.$$

Результаты расчетов представим ниже в таблице.

Значения $k \leq i$	p_k/p_0	p_k	$k p_k$
0	1	3,07E-12	0
1	8	2,45E-11	2,45E-11
2	60,8	1,87E-10	3,73E-10
3	437,76	1,34E-09	4,03E-09
4	2976,768	9,13E-09	3,65E-08
5	19051,3152	5,85E-08	2,92E-07
6	114307,8912	3,51E-07	2,1E-06
7	640124,1907	1,96E-06	1,37E-05
8	3328645,792	1,02E-05	8,17E-05
9	15977499,8	4,9E-05	0,000441
10	70300999,12	0,000216	0,002157
11	281203996,5	0,000863	0,009492
12	1012334387	0,003106	0,037277
13	3239470040	0,009941	0,129228
14	9070516111	0,027834	0,389672
15	21769238666	0,066801	1,002014
16	43538477331	0,133602	2,13763
17	69661563730	0,213763	3,633971
18	83593876476	0,256516	4,617281
19	66875101181	0,205212	3,899037
20	26750040472	0,082085	1,6417
Σ	3,25882E+11	1	17,5

$$p_0 = 3,07 \cdot 10^{12}, P(N_{\text{нас}} = 10) = P(S_{10}) = p_{10} = p_0 \rho^{10} 20! / 10! = 0,000216.$$

Ответ. $P(N_{\text{нас}} = 10) \approx 0,0002$.

Задача 5.

Параметры системы:

$n = 1, i = 20, \lambda = 2$ заявки в сутки, $\mu = 48$ заявок в сутки, $\rho = 2/48 = 0,042$.

Результаты расчетов представим ниже в таблице.

Значения $k \leq i$	p_k/p_0	p_k	kp_k
0	1	0,25264	0
1	0,84	0,212217	0,212217
2	0,67032	0,169349	0,338699
3	0,50676192	0,128028	0,384085
4	0,361828011	0,091412	0,365649
5	0,243148423	0,061429	0,307145
6	0,153183507	0,0387	0,232201
7	0,090071902	0,022756	0,15929
8	0,049179258	0,012425	0,099397
9	0,024786346	0,006262	0,056358
10	0,011451292	0,002893	0,028931
11	0,004809543	0,001215	0,013366
12	0,001818007	0,000459	0,005512
13	0,00061085	0,000154	0,002006
14	0,00017959	4,54E-05	0,000635
15	4,52567E-05	1,14E-05	0,000172
16	9,5039E-06	2,4E-06	3,84E-05
17	1,59666E-06	4,03E-07	6,86E-06
18	2,01179E-07	5,08E-08	9,15E-07
19	1,6899E-08	4,27E-09	8,11E-08
20	7,09758E-10	1,79E-10	3,59E-09
Σ	3,958205226	1	2,205708

Таким образом, $p_0 = 0,25264$. Следовательно:

1) среднее число самолетов, заправляемых и ожидающих заправки:

$$L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = i - \frac{1 - p_0}{\rho} = 20 - \frac{1 - 0,25264}{0,042} \approx 2,206;$$

2) среднее число самолетов, ожидающих заправки:

$$L_{\text{оч}} = i - (1 - p_0) \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right) = 20 - (1 - 0,25264) \left(\frac{1}{0,042} + 1 \right) \approx 1,458;$$

$$\Lambda = A = \mu(1 - p_0) = 48(1 - 0,25264) \approx 35,873;$$

3) среднее время простоя самолета:

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda} = \frac{2,206}{35,873} \approx 0,061 \text{ сут} = 1,464 \text{ ч};$$

4) среднее время ожидания заправки:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda} = \frac{1,458}{35,873} \approx 0,041 \text{ сут} = 0,984 \text{ ч}.$$

Ответ. $L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} \approx 2,206$; $L_{\text{оч}} \approx 1,458$;

$T_{\text{сист}} \approx 0,061 \text{ сут} = 1,464 \text{ ч}$; $T_{\text{оч}} \approx 0,041 \text{ сут} = 0,984 \text{ ч}.$

Задача 6.

Параметры системы:

$n = 1$, $i = 15$, $\lambda = 1/5 = 0,2$ заявок в сутки; если считать, что база может работать в три смены, т. е. круглосуточно, то $\mu = 3$ заявок в сутки; $\rho = 0,2/3 = 0,067$.

Результаты промежуточных расчетов представим ниже в таблице.

Значения $k \leq i$	p_k/p_0	p_k	kp_k
0	1	0,177889	0
1	1,005	0,178779	0,178779
2	0,94269	0,167694	0,335389
3	0,821083	0,146062	0,438185
4	0,660151	0,117434	0,469735
5	0,486531	0,086549	0,432743
6	0,325976	0,057988	0,347925
7	0,196563	0,034967	0,244766
8	0,105358	0,018742	0,149936

Значения $k \leq i$	p_k/p_0	p_k	kp_k
9	0,049413	0,00879	0,07911
10	0,019864	0,003534	0,035336
11	0,006654	0,001184	0,013021
12	0,001783	0,000317	0,003807
13	0,000358	6,38E-05	0,000829
14	4,8E-05	8,54E-06	0,00012
15	3,22E-06	5,72E-07	8,59E-06
Σ	5,621476	1	2,72969

Таким образом, $p_0 = 0,177889$,

$$L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = i - \frac{1-p_0}{\rho} \approx 15 - \frac{1-0,178}{0,067} \approx 2,731;$$

$$L_{\text{оч}} = i - (1-p_0) \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right) = 15 - (1-0,178) \left(\frac{1}{0,067} + 1 \right) \approx 1,909;$$

$$\Lambda = A = \mu(1-p_0) \approx 3(1-0,178) = 2,466.$$

1) среднее время простоя траулера $T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda} = \frac{2,731}{2,466} \approx 1,107$ сут;

2) среднее время ожидания траулером обслуживания

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda} = \frac{1,909}{2,466} \approx 0,774 \text{ сут};$$

3) среднее время простоя базы равно среднему времени ожидания очередной заявки минус среднее время обслуживания заявки, т. е.

$$T_{\text{прост}} = 1/\Lambda - 1/3 = (1/2,466) - 0,333 \approx 0,406 - 0,333 = 0,073 \text{ сут.}$$

Ответ. $T_{\text{сист}} \approx 1,107$ сут; $T_{\text{оч}} \approx 0,774$ сут; $T_{\text{прост}} \approx 0,073$ сут.

9.2. Многоканальная замкнутая СМО

Рассмотрим теперь замкнутую СМО, имеющую n каналов обслуживания и i источников заявок при условии $i > n$.

Состояния системы снова нумеруем по числу источников, находящихся в пассивном состоянии:

S_0 — все источники в активном состоянии, очереди нет, канал свободен;

S_1 — один источник находится в пассивном состоянии, канал занят — обслуживает поданную этим источником заявку, очереди нет;

S_2 — два источника находятся в пассивном состоянии, два канала обслуживают поданные заявки, очереди нет; ...;

S_n — n источников находятся в пассивном состоянии, все каналы заняты, очереди нет;

S_{n+1} — $n + 1$ источников находятся в пассивном состоянии, все каналы заняты, n заявок обслуживаются, одна заявка стоит в очереди; ...;

S_i — все источники в пассивном состоянии, n заявок обслуживаются, $i - n$ заявок ждут в очереди.

Размеченный граф состояний системы (рис. 31).

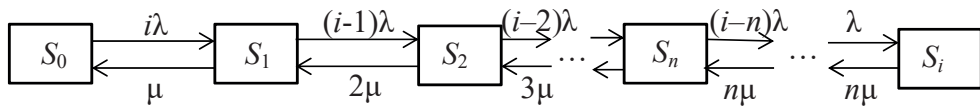


Рис. 31

Переход из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит с интенсивностью потока заявок от $i - k$ активных источников заявок, каждый из которых имеет интенсивность λ , и, следовательно, имеет суммарную интенсивность $(i - k)\lambda$. Переход из любого состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит с интенсивностью $k\mu$ для состояний системы, когда не все, а только k ее каналов заняты ($k < n$). Если же все n каналов системы заняты ($k \geq n$), то переход из любого состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит с интенсивностью освобождения любого из n занятых каналов, т. е. с одной и той же постоянной интенсивностью $n\mu$.

Найдем предельную вероятность начального состояния системы S_0 .

Рассматривая работу системы по схеме гибели и размножения, имеем

$$p_0 = \left(1 + \frac{i!}{(i-1)!} \rho + \frac{i!}{(i-2)!} \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{i!}{(i-n)!} \frac{\rho^n}{n!} + \dots + \frac{i!}{0!} \frac{\rho^i}{n! n^{i-n}} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n \frac{i!}{(i-k)!} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=n+1}^i \frac{\rho^{k-n} i!}{n^{k-n} (i-k)!} \right)^{-1}.$$

Итак, найдена предельная вероятность p_0 :

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{i!}{(i-k)!} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=n+1}^i \frac{\rho^{k-n} i!}{n^{k-n} (i-k)!} \right)^{-1}.$$

Найдем предельные вероятности остальных состояний СМО:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{i!}{(i-k)!} \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \\ p_k &= \frac{i!}{(i-k)!} \frac{\rho^k}{n^{k-n} n!} p_0, \quad k = n+1, n+2, \dots, i. \end{aligned}$$

Вероятность наличия очереди в системе:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{k=n+1}^i p_k = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \sum_{k=n+1}^i \frac{\rho^{k-n} i!}{n^{k-n} (i-k)!}.$$

Вероятность того, что заявка будет обслужена в системе этого типа:

$$P_{\text{об}} = 1.$$

Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = 0.$$

Относительная пропускная способность:

$$Q = 1.$$

По формуле математического ожидания найдем среднее число занятых каналов и равное ему среднее число заявок, находящихся под обслуживанием:

$$\bar{k} = L_{\text{об}} = \sum_{k=0}^{n-1} k p_k + n \sum_{k=n}^i p_k = \sum_{k=0}^{n-1} k p_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k \right) = n - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k.$$

Таким образом,

$$\bar{k} = n - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k,$$

$$L_{\text{об}} = \bar{k}.$$

Все остальные характеристики СМО выразим через найденное значение $\bar{k}$.

Абсолютная пропускная способность системы равна среднему числу занятых каналов, умноженному на производительность каждого канала, равную интенсивности потока обслуживаний:

$$A = \bar{k} \mu.$$

Интенсивность потока обслуженных заявок:

$$\nu = A = \bar{k} \mu.$$

Поскольку все заявки будут обслужены, средняя интенсивность потока заявок, т.е. среднее число поданных в единицу времени заявок, равна абсолютной пропускной способности системы:

$$\Lambda = A = \bar{k} \mu.$$

С другой стороны, средняя интенсивность суммарного потока заявок порождается активными источниками с интенсивностью λ для каждого источника i , следовательно, равна

$$\Lambda = \lambda N_{\text{акт}}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Lambda = A = \lambda N_{\text{акт}} = \bar{k} \mu,$$

найдем среднее число источников, находящихся в активном состоянии:

$$N_{\text{акт}} = \frac{A}{\lambda} = \frac{\bar{k} \mu}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\rho}.$$

Среднее число источников, находящихся в пассивном состоянии, равно

$$N_{\text{пас}} = i - N_{\text{акт}} = i - \frac{\bar{k}}{\rho}.$$

Вероятность того, что источник заявок находится в активном состоянии, как и в случае одноканальной замкнутой системы, равна

$$P_{\text{акт}} = \frac{N_{\text{акт}}}{i} = \frac{A}{i\lambda} = \frac{\Lambda}{i\lambda}.$$

Среднее число заявок, находящихся в системе,

$$L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = i - \frac{\bar{k}}{\rho}.$$

Помимо этого, его можно найти и через вероятности состояний системы по формуле:

$$L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = \sum_{k=0}^i k p_k.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди, найдем как разность среднего числа заявок, находящихся в системе, и среднего числа заявок, находящихся под обслуживанием:

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - L_{\text{об}} = i - \frac{\bar{k}}{\rho} - \bar{k} = i - \bar{k} \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right).$$

Итак,

$$L_{\text{оч}} = i - \bar{k} \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right).$$

По формулам Литтла получим:

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\Lambda} = \frac{\bar{k}}{\bar{k}\mu} = \frac{1}{\mu} = \bar{t}_{\text{об}}, \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda}, \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda}.$$

Пусть g — производительность источника заявок, находящегося в активном состоянии. Тогда средняя производительность среднего числа источников, находящихся в активном состоянии, равна $G = gN_{\text{акт}}$. Средняя потеря производительности среднего числа источников, находящихся в пассивном состоянии, равна $gN_{\text{пас}}$.

Задачи для проработки теоретического материала [2]

Задача 1. Бригада из трех человек обслуживает 12 автоматов. Интенсивность поломки каждого автомата $\lambda = 1$ (поломка в час). Среднее время, которое тратит один наладчик на ремонт одного автомата, равно 0,1 ч.

Определить:

- 1) предельные вероятности состояний данной СМО;
- 2) среднее число автоматов в очереди, ожидающих ремонта;
- 3) среднее число неисправных автоматов (т.е. находящихся в ремонте и ожидающих ремонта);
- 4) среднее число свободных наладчиков;

- 5) среднее число занятых каналов (среднее число обслуживаемых заявок);
- 6) абсолютную пропускную способность СМО;
- 7) относительную пропускную способность СМО;
- 8) вероятность наличия очереди;
- 9) среднее время пребывания автомата в очереди, ремонте и системе.

Задача 2. В кооперативе по ловле рыбы имеется 7 катеров, для ремонта которых используется два дока. Каждый док может одновременно принять для ремонта только один катер. В среднем на ремонт одного катера уходит 0,25 месяца. Каждый функционирующий катер выходит из строя в среднем 3 раза в месяц. Определить основные характеристики эффективности системы.

Задача 3. Два рабочих обслуживают группу из 9 станков. В среднем каждый станок останавливается один раз в час. Обслуживание одного станка занимает у рабочего в среднем 6 мин. Определить вероятность того, что не менее трех станков будет находиться в рабочем состоянии.

Задача 4. В гараже находятся 15 автомашин и три станции обслуживания, где проводятся профилактические и ремонтные работы. Как правило, обслуживание одной машины в среднем занимает одни сутки. Каждая машина в течение месяца в среднем трижды нуждается в проведении ремонтных работ. Определить основные характеристики эффективности системы.

Задача 5. При проектировании морского порта рассматриваются два проекта:

- 1) построить два порта, в каждом из них устроить по одному причалу, приписать к каждому из этих портов одинаковое число судов;
- 2) построить один порт с двумя причалами.

Какой из проектов является более выгодным с точки зрения минимизации потерь времени на ожидание погрузочно-разгрузочных работ, если количество судов, которое порт должен обслужить, равно 30? Обслуживание одного судна в среднем занимает сутки, и каждое судно приходит в порт, как правило, три раза в месяц. Повлияет ли увеличение интенсивности прихода судна в порт в 3 раза (уменьшение в три раза) на оптимальность проекта?

Решения и ответы

Задача 1.

Рассматриваемая система массового обслуживания — многоканальная СМО замкнутого типа.

Параметры системы:

- число каналов обслуживания $n = 3$ (бригада из трех наладчиков);
- число источников заявок $i = 12$ (12 автоматов);
- интенсивность потока заявок, порождаемого каждым источником, $\lambda = 1$;
- среднее время ремонта одного автомата одним наладчиком $\bar{t}_{\text{об}} = 0,1$ ч;
- интенсивность потока обслуживаний $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{0,1} = 10$ (автоматов в час);
- нагрузка (трафик) системы $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{10} = 0,1$ (эрланга).

Сначала найдем отношение предельных вероятностей к p_0 по формуле

$$\frac{p_k}{p_0} = \frac{i! \rho^k}{(i-k)! k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

для случая $k \leq n$ и

$$\frac{p_k}{p_0} = \frac{i! \rho^k}{n^{k-n} n! (i-k)!}, \quad k = 4, \dots, 12$$

для случая $k > n$ (k — число автоматов, требующих наладки).

Для дальнейших расчетов вычисления предельных вероятностей и других показателей системы удобно записать в таблицу.

k	$l_{\text{оч}}$	$k_{\text{св}}$	p_k/p_0	p_k	$l_{\text{оч}} p_k$	$k p_k$	$k_{\text{св}} p_k$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	3	1,0000	0,3156	0,0000	0,0000	0,9468
1	0	2	1,2000	0,3787	0,0000	0,3787	0,7574
2	0	1	0,6600	0,2083	0,0000	0,4166	0,2083
3	0	0	0,2200	0,0694	0,0000	0,2082	0,0000
4	1	0	0,0660	0,0208	0,0208	0,0832	0,0000

k	$l_{\text{оч}}$	$k_{\text{св}}$	p_k/p_0	p_k	$l_{\text{оч}}p_k$	kp_k	$k_{\text{св}}p_k$
5	2	0	0,0176	0,0056	0,0112	0,0280	0,0000
6	3	0	0,0041	0,0013	0,0039	0,0078	0,0000
7	4	0	0,0008	0,0003	0,0012	0,0021	0,0000
8	5	0	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	6	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	7	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	8	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
12	9	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Σ	—	—	3,1686	1,0000	0,0371	1,1246	1,9125

Обозначения:

k — число неисправных автоматов, т. е. число источников заявок, находящихся в пассивном состоянии (номер состояния системы);

$l_{\text{оч}}$ — число неисправных автоматов, ожидающих начала ремонта в очереди;

$k_{\text{св}}$ — число свободных работников (число свободных каналов обслуживания).

Поскольку сумма вероятностей всех состояний системы равна единице (нормировочное условие): $\sum_{k=0}^{12} p_k = 1$, сумма всех элементов четвертого столбца равна $\sum_{k=0}^{12} \frac{p_k}{p_0} = \frac{1}{p_0} \sum_{k=0}^{12} p_k = \frac{1}{p_0}$. В нашем случае

$1/p_0 = 3,1686$.

Вероятность того, что все рабочие свободны (система в состоянии S_0):

$$p_0 = 1/3,1686 = 0,3156.$$

Предельные вероятности p_k (столбец 5) вычисляются умножением элементов столбца 4 на вероятность p_0 . Сумма элементов столбца 5 в соответствии с нормировочным условием должна быть равна $1 \pm \Delta$, где Δ — ошибка округления (в данном случае $\Delta = 0$).

Значения элементов столбца 6 получаются умножением элементов столбца 2 на соответствующие элементы столбца 5. Сумма элементов столбца 6 равна среднему числу автоматов в очереди

$$L_{\text{оч}} = \sum l_{\text{оч}} p_k = 0,0371.$$

Значения элементов столбца 7 получаются умножением элементов столбца 1 на соответствующие элементы столбца 5. Сумма элементов столбца 7 равна среднему числу автоматов в пассивном состоянии (т. е. в очереди и под обслуживанием, в ремонте)

$$L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = \sum k p_k = 1,1246.$$

Значения элементов столбца 8 получаются умножением элементов столбца 3 на соответствующие элементы столбца 5. Сумма элементов столбца 8 равна среднему числу свободных наладчиков

$$\bar{k}_{\text{св}} = \sum k_{\text{св}} p_k = 1,9125.$$

Среднее число занятых каналов, равное среднему числу заявок под обслуживанием, можно определить как разность

$$\bar{k} = L_{\text{об}} = n - \bar{k}_{\text{св}} = 3 - 1,9125 = 1,0875.$$

Абсолютную пропускную способность СМО определяем по формуле:

$$A = \mu \bar{k} = 10 \cdot 1,0875 = 10,875 \text{ (автоматов в час)}.$$

Для данного класса СМО (СМО замкнутого типа) относительная пропускная способность $Q = 1$, поскольку рано или поздно все неисправные автоматы будут налажены.

Среднее число $L_{\text{сист}}$ автоматов в системе (под обслуживанием и в очереди) мы получили равным 1,1246, однако, как и для случая одноканальной СМО, значение $L_{\text{сист}}$ можно получить, используя более удобную для вычисления формулу, если известно значение $\bar{k}$:

$$L_{\text{сист}} = i - \frac{\bar{k}}{\rho} = 12 - 10,875 = 1,125,$$

(различие в значениях величины $L_{\text{сист}}$, полученных здесь и ранее, связано с ошибками округлений).

Среднее число $L_{\text{оч}}$ автоматов в очереди можно определить также по формуле:

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - L_{\text{об}} = 1,1246 - 1,0875 = 0,0371.$$

Среднее число исправных автоматов (источников заявок в активном состоянии) найдем как разность:

$$N_{\text{акт}} = i - N_{\text{пас}} = 12 - 1,1246 = 10,8754,$$

или по формуле $N_{\text{акт}} = \frac{\bar{k}}{\rho} = \frac{1,0875}{0,1} = 10,875.$

Вероятность наличия очереди найдем как разность:

$$P_{\text{оч}} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = 1 - (0,3156 + 0,3787 + 0,2083 + 0,0694) = 1 - 0,972 = 0,028,$$

или как сумму вероятностей:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{k=4}^{12} p_k = 0,0208 + 0,0056 + 0,0013 + 0,0003 + 0,0000 + \dots + 0,0000 = 0,028.$$

Вероятность того, что автомат будет исправен (источник заявок активен):

$$P_{\text{акт}} = \frac{N_{\text{акт}}}{i} = \frac{10,8754}{12} \approx 0,906.$$

Средняя интенсивность суммарного потока заявок $\Lambda = A = 10,875$.

Среднее время, в течение которого автомат находится в очереди, в ремонте и в целом в системе равно:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda} = \frac{0,0371}{10,875} \approx 0,003 \text{ ч}, \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\Lambda} = \frac{1,0875}{10,875} = 0,1 \text{ ч},$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda} = \frac{1,1246}{10,875} \approx 0,103 \text{ ч}.$$

Ответ.

1) предельные вероятности состояний СМО: см. результаты вычислений, приведенные в табличной форме, столбец 5;

2) среднее число автоматов, ожидающих ремонта: $L_{\text{оч}} \approx 0,037$;

3) среднее число неисправных автоматов: $L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} \approx 1,125$;

4) среднее число свободных наладчиков: $\bar{k}_{\text{св}} \approx 1,912$;

5) среднее число обслуживаемых заявок: $\bar{k} = L_{\text{об}} \approx 1,088$;

6) абсолютная пропускная способность СМО: $A \approx 10,875$;

7) относительная пропускная способность СМО: $Q = 1$;

8) вероятность наличия очереди: $P_{\text{оч}} \approx 0,028$;

9) среднее время пребывания автомата в очереди, ремонте и системе:

$$T_{\text{оч}} \approx 0,003 \text{ ч}, \quad T_{\text{об}} \approx 0,1 \text{ ч}, \quad T_{\text{сист}} \approx 0,103 \text{ ч}.$$

Задача 2.

Параметры системы:

- число каналов обслуживания $n = 2$ (дока);
- число источников заявок $i = 7$ (катеров);
- интенсивность потока заявок, порождаемого каждым источником, $\lambda = 3$ заявки на ремонт в месяц;
- среднее время ремонта одного катера в доке $\bar{t}_{\text{об}} = 0,25$ месяца;

- интенсивность потока обслуживаний $\mu = \frac{1}{t_{\text{об}}} = \frac{1}{0,25} = 4$ катера в месяц;
- нагрузка (трафик) системы $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0,75$ (эрланга).

Сведем вычисления в таблицу (см. ниже).

k	$l_{\text{оч}}$	$k_{\text{св}}$	p_k/p_0	p_k	$l_{\text{оч}}p_k$	kp_k	$k_{\text{св}}p_k$
0	0	2	1,00000	0,006696	0,000000	0,000000	0,013391
1	0	1	5,25000	0,035152	0,000000	0,035152	0,035152
2	0	0	11,81250	0,079091	0,000000	0,158183	0,000000
3	1	0	22,14844	0,148296	0,148296	0,444889	0,000000
4	2	0	33,22266	0,222445	0,444889	0,889778	0,000000
5	3	0	37,37549	0,250250	0,750750	1,251250	0,000000
6	4	0	28,03162	0,187688	0,750750	1,126125	0,000000
7	5	0	10,51186	0,070383	0,351914	0,492680	0,000000
Σ	—	—	149,3526	1	2,4466	4,398057	0,048543

Вероятность того, что оба дока свободны (система в состоянии S_0):

$$p_0 = 1/149,3526 = 0,006696 \approx 0,007.$$

Среднее число катеров в очереди (длина очереди):

$$L_{\text{оч}} = \sum l_{\text{оч}} p_k = 2,4466 \approx 2,447.$$

Среднее число катеров в пассивном состоянии (т. е. в очереди и под обслуживанием, в ремонте):

$$L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = \sum kp_k = 4,398057 \approx 4,398.$$

Среднее число свободных доков:

$$\bar{k}_{\text{св}} = \sum k_{\text{св}} p_k = 0,048543 \approx 0,049.$$

Среднее число занятых каналов, равное среднему числу заявок под обслуживанием:

$$\bar{k} = L_{\text{об}} = n - \bar{k}_{\text{св}} \approx 2 - 0,048543 = 1,951457 \approx 1,951.$$

Абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \mu \bar{k} = 4 \cdot 1,951457 = 7,805828 \approx 7,806 \text{ (катеров в месяц)}.$$

Относительная пропускная способность $Q = 1$.

Среднее число исправных катеров (источников заявок в активном состоянии):

$$N_{\text{акт}} = i - N_{\text{пас}} = 7 - 4,398057 = 2,601943 \approx 2,602,$$

или по формуле
$$N_{\text{акт}} = \frac{\bar{k}}{\rho} = \frac{1,951457}{0,75} \approx 2,601943 \approx 2,602.$$

Вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{оч}} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - (0,0067 + 0,0351 + 0,0791) = 0,8791 \approx 0,879.$$

Вероятность того, что катер будет исправен (источник заявок активен):

$$P_{\text{акт}} = \frac{N_{\text{акт}}}{i} = \frac{2,601943}{7} \approx 0,372.$$

Средняя интенсивность суммарного потока заявок:

$$\Lambda = A = 7,805828 \approx 7,806.$$

Среднее время (доля месяца), в течение которого катер находится в очереди, в ремонте и в целом в системе, равно:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda} = \frac{2,4466}{7,805828} \approx 0,313, \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\Lambda} = \frac{1,951457}{7,805828} = 0,25 = \bar{t}_{\text{об}},$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda} = \frac{4,398057}{7,805828} \approx 0,563.$$

Ответ. $p_0 \approx 0,007$; $L_{\text{оч}} \approx 2,447$; $L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} \approx 4,398$; $\bar{k}_{\text{св}} \approx 0,049$;

$$\bar{k} = L_{\text{об}} \approx 1,951$$
; $A \approx 7,806$; $Q = 1$; $N_{\text{акт}} \approx 2,602$; $P_{\text{оч}} \approx 0,879$; $P_{\text{акт}} \approx 0,372$;

$$T_{\text{оч}} \approx 0,313$$
; $T_{\text{об}} = \bar{t}_{\text{об}}$; $T_{\text{сист}} \approx 0,563$.

Задача 3.

Параметры системы:

$$n = 2 \text{ (рабочих)}, i = 9 \text{ (станков)}, \lambda = 1 \text{ в ч}, \bar{t}_{\text{об}} = 0,1 \text{ ч}.$$

Следовательно,

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ станков в ч}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ (эрланга)}.$$

Вычисления проводятся по той же схеме, что и в предыдущих задачах. Промежуточные результаты сведены в таблицу (см. ниже).

k	p_k/p_0	p_k
0	1	0,410601
1	0,9	0,369541
2	0,36	0,147816
3	0,126	0,051736
4	0,0378	0,015521
5	0,00945	0,003880
6	0,00189	0,000776
7	0,000284	0,000116
8	2,84E-05	1,16E-05
9	1,42E-06	5,82E-07
Σ	2,435453	1

Вероятность того, что оба рабочих свободны (система в состоянии S_0):

$$p_0 = 1/2,435453 = 0,410601 \approx 0,411.$$

Вероятность того, что не менее трех станков будет находиться в рабочем состоянии (не менее трех источников заявок будут активны):

$$P(N_{\text{акт}} \geq 3) = P(N_{\text{пас}} \leq 6) = \sum_{k=0}^6 p_k = 0,999871 \approx 1.$$

Ответ. $P(N_{\text{акт}} \geq 3) \approx 1$. Это практически достоверное событие.

Задача 4.

Параметры системы:

$n = 3$ (станции), $i = 15$ (автомашин), $\lambda = 3$ в месяц $= 3/30 = 0,1$ в сут,
 $\bar{t}_{\text{об}} = 1$ сут, $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 1$ в сут, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,1$ (эрланга).

Решение ведется аналогично рассмотренным в предыдущих примерах.

Осуществив необходимые вычисления, получим:

$$p_0 = 1/4,285 \approx 0,233, L_{\text{оч}} = \sum l_{\text{оч}} p_k \approx 0,098, L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} = \sum k p_k \approx 1,453.$$

$$\bar{k}_{\text{св}} = \sum k_{\text{св}} p_k \approx 1,645, \bar{k} = L_{\text{об}} = n - \bar{k}_{\text{св}} \approx 3 - 1,645 = 1,355.$$

$$A = \mu \bar{k} = 1 \cdot 1,355 = 1,355, Q = 1, N_{\text{акт}} = i - N_{\text{пас}} = 15 - 1,453 = 13,547.$$

$$P_{\text{оч}} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = 1 - (0,233 + 0,350 + 0,245 + 0,106) = 0,066.$$

$$P_{\text{акт}} = \frac{N_{\text{акт}}}{i} = \frac{13,547}{15} \approx 0,903. \Lambda = A = 1,355.$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda} = \frac{0,098}{1,355} \approx 0,072, T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\Lambda} = \frac{1,355}{1,355} = 1 = \bar{t}_{\text{об}}, T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda} = \frac{1,453}{1,355} \approx 1,072.$$

Ответ.

$$p_0 \approx 0,233; L_{\text{оч}} \approx 0,098; L_{\text{сист}} = N_{\text{пас}} \approx 1,453; \bar{k}_{\text{св}} \approx 1,645; \bar{k} = L_{\text{об}} \approx 1,355;$$

$$A \approx 1,355; Q = 1; N_{\text{акт}} \approx 13,547; P_{\text{оч}} \approx 0,066; P_{\text{акт}} \approx 0,903;$$

$$T_{\text{оч}} \approx 0,072; T_{\text{об}} = 1 = \bar{t}_{\text{об}}; T_{\text{сист}} \approx 1,072.$$

Задача 5.

Разберем первый проект.

Два порта, каждый из которых представляет одноканальную замкнутую СМО с одинаковым количеством источников заявок (15 судов) и параметрами:

$$n = 1, i = 15, \lambda = 3 \text{ в месяц} = 3/30 = 0,1 \text{ в сут}, \bar{t}_{\text{об}} = 1 \text{ сут},$$

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 1 \text{ в сут}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,1 \text{ (эрланга)}.$$

Вычисления проводятся в соответствии с ранее рассмотренной методикой. Находим

$$p_0 = \frac{1}{27,39955} \approx 0,036.$$

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - 0,036 = 0,964.$$

$$A = \mu P_{\text{зан}} = 1 \cdot 0,964 = 0,964, Q = 1, \Lambda = A = 0,964,$$

$$L_{\text{оч}} = i - (1 - p_0)(1 + 1/\rho) = 15 - 0,964(1 + 1/0,1) = 4,396.$$

Среднее время в очереди:

$$T_{\text{оч}} = L_{\text{оч}} / \Lambda = 4,396 / 0,964 \approx 4,560 \text{ сут},$$

Разберем второй проект.

Один порт с двумя причалами. Это замкнутая двухканальная СМО с параметрами:

$n = 2, i = 30, \lambda = 3$ в месяц $= 3/30 = 0,1$ в сут, $\bar{t}_{об} = 1$ сут,

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = 1 \text{ в сут, } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,1 \text{ (эрланга).}$$

Находим:

$$p_0 = 1/235,4765 \approx 0,004247 \approx 0,004.$$

$$L_{оч} = \sum l_{оч} p_k = 8,233569 \approx 8,234.$$

$$A = \mu \bar{k} = 1 \cdot 1,978766 = 1,978766 \approx 1,979 \text{ (судов в сут), } Q = 1.$$

$$\Lambda = A = 1,978766 \approx 1,979.$$

Среднее время (в сут), в течение которого судно находится в очереди:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\Lambda} = \frac{8,233569}{1,978766} \approx 4,161.$$

Сравнение потерь времени на ожидание погрузочно-разгрузочных работ в первом ($T_{оч} = 4,560$ сут) и втором ($T_{оч} = 4,161$ сут) проектах показывает, что во втором варианте это время меньше на 0,4 сут (9,6 ч) в среднем для каждого судна. В этом смысле вариант одного порта с двумя причалами выгоднее двух портов с одним причалом в каждом.

Увеличим интенсивность прихода судна в порт в 3 раза.

Новые параметры первого проекта:

$$n = 1, i = 15, \lambda = 9 \text{ в месяц} = 9/30 = 0,3 \text{ (1/сут),}$$

$$\bar{t}_{об} = 1 \text{ (сут), } \mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = 1 \text{ (1/сут), } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,3 \text{ (эрланга).}$$

$$\text{Находим } p_0^{-1} = \sum \frac{p_k}{p_0} \approx 525976,7,$$

$$p_0 = \left(\sum \frac{p_k}{p_0} \right)^{-1} = \frac{1}{525976,7} \approx 0,000002.$$

$$P_{зан} = 1 - p_0 = 1 - 0,000002 = 0,999998 \approx 1.$$

$$A = \mu P_{зан} = 1 \cdot 0,999998 \approx 1, Q = 1, \Lambda = A = 1,$$

$$L_{оч} = i - (1 - p_0)(1 + 1/\rho) = 15 - 1 \cdot (1 + 1/0,3) = 10,667.$$

Среднее время в очереди:

$$T_{оч} = L_{оч} / \Lambda = 10,667 / 1 = 10,667 \text{ сут,}$$

Новые параметры второго проекта:

$$n = 2, i = 30, \lambda = 9 \text{ в месяц} = 9/30 = 0,3 \text{ (1/сут),}$$

$$\bar{t}_{об} = 1 \text{ (сут), } \mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = 1 \text{ (1/сут), } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,3 \text{ (эрланга).}$$

Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 , т. е. оба канала будут свободны, практически равна нулю:

$$p_0 = 1/(7,99 \cdot 10^{10}) \approx 1,25 \cdot 10^{-11} \approx 0.$$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \sum l_{\text{оч}} p_k \approx 21,333.$$

Средняя интенсивность суммарного потока заявок $\Lambda = A = 2$.

Среднее время (в сутках), в течение которого судно находится в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda} = \frac{21,333}{2} \approx 10,667.$$

Потери времени на ожидание погрузочно-разгрузочных работ в первом ($T_{\text{оч}} = 10,667$ сут) и втором ($T_{\text{оч}} = 10,667$ сут) проектах показывает, что они одинаковы. Обе системы работают безостановочно, на пределе своих возможностей.

Уменьшив интенсивность прихода судна в порт по сравнению с исходной в 3 раза.

Новые параметры первого проекта:

$$n = 1, i = 15, \lambda = 1 \text{ в месяц} = 1/30 \approx 0,033 \text{ (1/сут)},$$

$$\bar{t}_{\text{об}} = 1 \text{ (сут)}, \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 1 \text{ (1/сут)}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,033 \text{ (эрланга)}.$$

Выполнив вычисления, найдем:

$$p_0^{-1} = \sum \frac{p_k}{p_0} \approx 1,881257 \approx 1,881,$$

$$p_0 = \left(\sum \frac{p_k}{p_0} \right)^{-1} = \frac{1}{1,881257} \approx 0,53156 \approx 0,532.$$

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - 0,53156 = 0,46844 \approx 0,468.$$

$$A = \mu P_{\text{зан}} = 1 \cdot 0,46844 = 0,46844 \approx 0,468, Q = 1, \Lambda = A \approx 0,468,$$

$$L_{\text{оч}} = i - (1 - p_0)(1 + 1/\rho) = 15 - 0,46844 \cdot 31,30303 \approx 0,336409 \approx 0,336.$$

Среднее время в очереди:

$$T_{\text{оч}} = L_{\text{оч}} / \Lambda = 0,336409 / 0,46844 \approx 0,718147 \approx 0,718 \text{ сут},$$

Новые параметры второго проекта:

$$n = 2, i = 30, \lambda = 1 \text{ в месяц} = 1/30 = 0,033 \text{ (1/сут)},$$

$$\bar{t}_{\text{об}} = 1 \text{ (сут)}, \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 1 \text{ (1/сут)}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,033 \text{ (эрланга)}.$$

Найдем вероятность того, что система находится в состоянии S_0 :
 $p_0 = 1/2,850 \approx 0,351$.

Длина очереди:

$$L_{\text{оч}} = \sum l_{\text{оч}} p_k \approx 0,235.$$

Абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \mu \bar{k} = 1 \cdot 0,951 = 0,951 \text{ (судов в сут).}$$

Средняя интенсивность суммарного потока заявок $\Lambda = A = 0,951$.

Среднее время (сут), в течение которого судно находится в очереди:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda} = \frac{0,235}{0,951} \approx 0,247.$$

Потери времени на ожидание погрузочно-разгрузочных работ в первом ($T_{\text{оч}} = 0,748$ сут) и втором ($T_{\text{оч}} = 0,247$ сут) проектах показывает, что второй вариант с точки зрения минимизации этого времени выгоднее.

Ответ.

Увеличение или уменьшение интенсивности прихода судов в порт в 3 раза не влияет на оптимальность второго варианта проекта, но при увеличении интенсивности разница проектов по выбранной эффективности уменьшается до нуля:

- при интенсивности $\lambda = 0,033$ среднее время ожидания обслуживания во втором варианте проекта уменьшается на 0,5 сут для каждого судна;
- при интенсивности $\lambda = 0,1$ среднее время ожидания во втором варианте проекта уменьшается на 0,4 сут;
- при интенсивности $\lambda = 0,3$ среднее время ожидания в обоих проектах становится равным. Дальнейшее увеличение интенсивности приведет к одинаковому увеличению длины очереди и среднего времени ожидания в ней заявкой обслуживания для каждого из проектов, поскольку все причалы будут вынуждены работать при такой интенсивности поступления заявок безостановочно.

9.3. Особенности замкнутых СМО

В отличие от других типов СМО в замкнутых СМО

$$A \neq \lambda Q,$$

т. к. λ здесь обозначает интенсивность одного (любого) активного источника заявок, а не интенсивность внешнего стационарного потока

заявок. Количество активных источников в замкнутых системах меняется в зависимости от состояния системы. Средняя интенсивность потока заявок в замкнутых системах обозначается через Λ . Поэтому во всех формулах, отражающих общие зависимости параметров СМО, в замкнутых системах параметр λ меняется на Λ . Значит, в таких системах имеет место равенство:

$$A = \Lambda Q,$$

а т. к. в замкнутых системах

$$Q = 1, \text{ то } A = \Lambda.$$

Также в замкнутых системах

$$\bar{k} \neq \rho Q,$$

но будут верны равенства

$$\bar{k} = \frac{\Lambda}{\mu} Q = \frac{A}{\mu}.$$

Это означает, что, несмотря на специфические особенности замкнутых систем, основные закономерности их функционирования остаются теми же, что и для остальных СМО.



10. Многоканальные СМО со взаимопомощью между каналами типа «Все как один»

Рассмотрим СМО, у которых есть возможность обрабатывать одну заявку сразу всеми каналами для повышения скорости ее обработки. Например, магазин имеет две бригады грузчиков по два человека в каждой бригаде. Задачей каждой бригады является разгрузка прибывшей машины. Но для срочной разгрузки какой-либо машины эти две бригады можно объединить в одну и разгрузить машину с помощью четырех человек в два раза быстрее.

Проанализируем возможности данного режима работы СМО. При таком типе обслуживания n -канальная СМО работает как одноканальная, но с более высокой интенсивностью обслуживания. Нужно выяснить, каким образом ускорение обслуживания зависит от числа задействованных каналов. Интенсивность простейшего потока

обслуживания в этом случае является функцией $\varphi(n)$ числа n привлеченных каналов. Это неубывающая функция.

Неограниченное увеличение числа каналов ведет к пропорциональному увеличению интенсивности обслуживания только до определенного предела. Начиная с некоторого критического числа каналов ($n_{кр}$), дальнейшее увеличение числа обслуживающих каналов не повышает интенсивности потока обслуживания.

Рассмотрим простейший вид функции $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = \begin{cases} n\mu & \text{при } n \leq n_{кр}, \\ n_{кр}\mu & \text{при } n > n_{кр}, \end{cases}$$

где μ — интенсивность обслуживания заявок одним каналом.

График этой функции представлен на рис. 32.

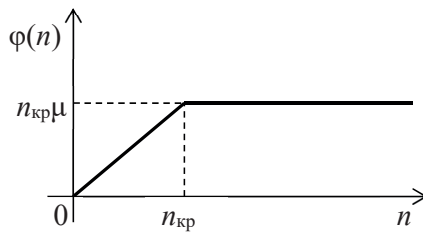


Рис. 32

Возможен более сложный вид функции $\varphi(n)$, например, ее график может быть выпуклым кверху на интервале $(0, n_{кр})$. В дальнейшем будем рассматривать только указанный простейший вид этой функции.

10.1. Система с отказами и взаимопомощью между каналами типа «все как один»

Рассмотрим СМО с отказами и числом каналов $n \leq n_{кр}$, работающих в режиме взаимопомощи типа «все как один». Пусть интенсивность потока поступающих заявок равна λ , а интенсивность потока обслуживания для каждого канала равна μ . Интенсивность совместного обслуживания заявки всеми каналами равна $\varphi(n) = n\mu$. Работа такой системы не будет ничем отличаться от работы одноканальной

системы с отказами с общей интенсивностью потока обслуживаний равной $n\mu$.

Система имеет только два состояния:

S_0 — все n каналов свободны;

S_1 — все n каналов заняты.

Построим размеченный граф этой системы (рис. 33).

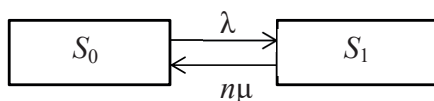


Рис. 33

Переход из состояния S_0 в состояние S_1 происходит с интенсивностью потока заявок λ . Переход из состояния S_1 в состояние S_0 происходит в данном случае с интенсивностью потока обслуживаний $n\mu$.

Приведенную интенсивность потока заявок обозначим, как обычно, ρ .

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Тогда

$$\frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\rho}{n} = \psi.$$

Все формулы, характеризующие работу данной СМО, можно получить из формул для одноканальной СМО с отказами, заменив в них параметр ρ на ψ .

Показатели для СМО со взаимопомощью между каналами типа «все как один» будем отмечать нижним индексом (+).

Найдем предельную вероятность состояния S_0 .

$$p_{0+} = \left(1 + \frac{\lambda}{n\mu}\right)^{-1} = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} = \frac{n}{\rho + n}.$$

Предельная вероятность состояния S_1 в таком случае

$$p_{1+} = \frac{\lambda}{n\mu} p_{0+} = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{n}{\rho + n} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} = \frac{\rho}{\rho + n}.$$

Итак, предельные вероятности состояний системы найдены:

$$p_{0+} = \frac{n}{\rho + n}, \quad p_{1+} = \frac{\rho}{\rho + n}.$$

Вероятность того, что заявка будет обслужена, равна вероятности того, что все каналы свободны, т. е. вероятности состояния S_0 системы:

$$P_{об+} = \frac{n}{\rho + n}.$$

Вероятность того, что заявке будет отказано в обслуживании, равна вероятности того, что все каналы заняты, т. е. вероятности состояния S_1 системы:

$$P_{отк+} = \frac{\rho}{\rho + n}, \quad P_{зан+} = \frac{\rho}{\rho + n}.$$

Относительная пропускная способность системы равна доле обслуженных заявок, т. е. вероятности того, что заявка будет обслужена:

$$Q_+ = P_{об+} = \frac{n}{\rho + n},$$

Абсолютная пропускная способность равна произведению числа поступающих в единицу времени заявок на ту долю из них, которая будет обслужена, т. е. произведению интенсивности потока заявок на относительную пропускную способность системы:

$$A_+ = \lambda Q_+ = \frac{\lambda n}{\rho + n}.$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, найдем как математическое ожидание числа таких заявок (ноль или одна):

$$L_{об+} = 0 \cdot p_{0+} + 1 \cdot p_{1+} = p_{1+} = \frac{\rho}{\rho + n}.$$

Среднее число каналов, занятых обслуживанием, также найдем как математическое ожидание числа таких каналов (ноль или все n):

$$\bar{k}_+ = 0 \cdot p_{0+} + n \cdot p_{1+} = np_{1+} = \frac{n\rho}{\rho + n}.$$

Заметим, что в СМО со взаимопомощью каналов в отличие от СМО без такой взаимопомощи среднее число заявок под обслуживанием не равно среднему числу занятых обслуживанием каналов:

$$L_{об+} \neq \bar{k}_+.$$

$$L_{об+} = \frac{\rho}{\rho + n}, \quad \bar{k}_+ = \frac{n\rho}{\rho + n}, \quad \bar{k}_+ = nL_{об+}.$$

Среднее число занятых каналов в n раз больше среднего числа обслуживаемых заявок, что очевидно, т. к. все n каналов обслуживают одну заявку.

Но для среднего числа занятых каналов остаются справедливыми формулы:

$$\bar{k}_+ = \frac{A_+}{\mu} = \rho Q_+.$$

Среднее число заявок в системе для СМО с отказами равно среднему числу заявок под обслуживанием:

$$L_{\text{сист}+} = L_{\text{об}+} = \frac{\rho}{\rho + n}.$$

Среднее время, проводимое заявкой в системе, или под обслуживанием, найдем по формуле Литтла:

$$T_{\text{сист}+} = \frac{L_{\text{сист}+}}{\lambda} = T_{\text{об}+} = \frac{L_{\text{об}+}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(\rho + n)} = \frac{1}{\lambda + n\mu}.$$

Таким образом,

$$T_{\text{сист}+} = T_{\text{об}+} = \frac{1}{\lambda + n\mu}.$$

Обозначим через $\bar{t}_{\text{об}+}$ среднее время обработки одной заявки всеми n каналами. Оно в n раз меньше времени обработки одной заявки одним каналом:

$$\bar{t}_{\text{об}+} = \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{n} \bar{t}_{\text{об}}.$$

Сравним $T_{\text{об}+} = \frac{1}{\lambda + n\mu}$ и $\bar{t}_{\text{об}+} = \frac{1}{n\mu}$. Знаменатель первой дроби больше, следовательно, первая дробь меньше второй:

$$T_{\text{об}+} = \frac{1}{\lambda + n\mu} < \frac{1}{n\mu} = \bar{t}_{\text{об}+}.$$

Так и должно быть: $T_{\text{об}+} < \bar{t}_{\text{об}+}$, поскольку при расчете $T_{\text{об}+}$ в системах с отказами средняя доля времени, в течение которой заявки обслуживались, относится ко всем заявкам, пришедшим в систему, как обслуженным, так и покинувшим систему необслуженными в силу отказа

им. По формуле Литтла это отношение среднего числа заявок, находящихся под обслуживанием в единицу времени, к общему числу приходящих в систему за это же время заявок.

$$T_{об+} = \frac{L_{об+}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(\rho + n)} = \frac{1}{\mu(\rho + n)} = \frac{n}{n\mu(\rho + n)} = \frac{Q_+}{n\mu} = Q_+ \bar{t}_{об+}.$$

Таким образом, $T_{об+}$ равно доле Q_+ от $\bar{t}_{об+}$:

$$\boxed{T_{об+} = Q_+ \bar{t}_{об+}}.$$

Сравним характеристики работы рассмотренной СМО с характеристиками n -канальной СМО с отказами, но без взаимопомощи между каналами (при $n \geq 2$).

Рассмотрим формулу p_0 для n -канальной СМО с отказами и без взаимопомощи:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \dots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}.$$

Возьмем два последних слагаемых из суммы, стоящей в скобках. Их сумма меньше суммы всех слагаемых в скобках, т. к. все слагаемые положительны:

$$\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!} < \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \Big| \cdot n!$$

Помножим обе части неравенства на $n!$

$$n\rho^{n-1} + \rho^n < \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right) \cdot n!$$

Разделим на сумму, стоящую в скобках:

$$\rho^{n-1}(n + \rho) \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} < n!$$

Помножим обе части неравенства на $\frac{\rho}{\rho + n}$:

$$\rho^{n-1}(n + \rho) \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} < n! \Big| \cdot \frac{\rho}{\rho + n} \Rightarrow \rho^n \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} < \frac{n!\rho}{\rho + n}.$$

Разделим обе части неравенства на $n!$

$$\rho^n \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} < \frac{n! \rho}{\rho + n} \quad | : n!$$

В результате преобразований получим:

$$\frac{\rho^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} < \frac{\rho}{\rho + n}.$$

Поскольку $\left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} = p_0$, получаем $\frac{\rho^n}{n!} p_0 < \frac{\rho}{\rho + n}$.

Теперь вспомним, что $\frac{\rho^n}{n!} p_0 = P_{\text{отк}}$ для системы без взаимопомощи

каналов, а $\frac{\rho}{\rho + n} = P_{\text{отк}+}$ для системы со взаимопомощью каналов.

Следовательно, имеем $P_{\text{отк}} < P_{\text{отк}+}$, т. е. вероятность отказа заявке в обслуживании при взаимопомощи каналов увеличивается.

Имея в виду, что $Q = 1 - P_{\text{отк}}$ и $Q_+ = 1 - P_{\text{отк}+}$, а также приняв во внимание неравенство $P_{\text{отк}} < P_{\text{отк}+}$, получаем

$$Q_+ < Q.$$

Тогда из того, что $A_+ = \lambda Q_+$ и $A = \lambda Q$, следует, что

$$A_+ < A.$$

Таким образом, относительная и абсолютная пропускные способности системы в результате взаимопомощи каналов уменьшаются.

Среднее время пребывания заявки под обслуживанием

$$T_{\text{об}} = \frac{Q}{\mu} = Q \bar{t}_{\text{об}} \text{ в системе без взаимопомощи и } T_{\text{об}+} = \frac{Q_+}{n\mu} = Q_+ \bar{t}_{\text{об}+} \text{ в си-}$$

стеме со взаимопомощью каналов. Поскольку числитель второй дроби меньше, а знаменатель больше, чем у первой дроби, то второе выражение меньше первого, т. е. среднее время пребывания заявки под обслуживанием в случае СМО со взаимопомощью каналов меньше, чем у такой же СМО без взаимопомощи каналов. И так как среднее время пребывания заявки в системе для СМО с отказами совпадает со средним временем пребывания заявки под обслуживанием, то

$$T_{\text{об}+} < T_{\text{об}} \text{ и } T_{\text{сист}+} < T_{\text{сист}}.$$

Естественно, что при работе каналов в режиме взаимопомощи типа «все как один» среднее время пребывания заявки в системе уменьшается.

Из формул Литтла

$$T_{об+} = \frac{L_{об+}}{\lambda}, \quad T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda}$$

и неравенства $T_{об+} < T_{об}$ вытекает, что $L_{об+} < L_{об}$, а также, что $L_{сист+} < L_{сист}$, поскольку в системах с отказами среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, совпадает со средним числом заявок, находящихся в системе.

Итак, сравнивая СМО без взаимопомощи каналов с аналогичной СМО со взаимопомощью типа «все как один», приходим к выводу, что:

- вероятность отказа заявке в обслуживании при взаимопомощи каналов увеличивается: $P_{отк} < P_{отк+}$;
- относительная пропускная способность системы в результате взаимопомощи каналов уменьшается: $Q_+ < Q$;
- абсолютная пропускная способность системы в результате взаимопомощи каналов уменьшается: $A_+ < A$;
- среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, в системах со взаимопомощью каналов уменьшается: $L_{об+} < L_{об}$;
- среднее число заявок, находящихся в системе, в результате взаимопомощи каналов уменьшается: $L_{сист+} < L_{сист}$;
- среднее время пребывания заявки под обслуживанием в системах со взаимопомощью каналов уменьшается: $T_{об+} < T_{об}$;
- среднее время пребывания заявки в системе при взаимопомощи каналов уменьшается: $T_{сист+} < T_{сист}$.

Анализируя полученные выводы, можно прийти к заключению, что применение взаимопомощи между каналами целесообразно тогда, когда приоритетным является уменьшение времени пребывания заявки в системе.

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. Во время уборочной кампании транспортная контора, имеющая в своем распоряжении пять машин, принимает заявки на перевозку зерновых от индивидуальных хозяйств. В среднем за рабочий день (12 ч), поступает по три заявки. Время погрузки, доставки к хра-

нилищу и разгрузки для одной машины в среднем занимает 12 ч. Контора не принимает заявок на перевозку от хозяйств до тех пор, пока не выполнит текущий заказ. Определить:

- 1) вероятность того, что очередная заявка получит отказ;
- 2) вероятность того, что заявка будет обслужена;
- 3) среднее число заявок, которое контора может обслужить при данном режиме работы;
- 4) среднее время, которое контора тратит на обслуживание одной заявки, попавшей под обслуживание;
- 5) среднее время обслуживания по отношению ко всем заявкам (как обслуженным, так и не обслуженным).

Задача 2. Бригада рабочих, обслуживающих узкий мост через реку с односторонним движением, заметила, что днем в образующейся пробке в среднем скапливается около 30 машин в течение часа. Как правило, каждый третий водитель желает, чтобы за время простоя его машину помыли. В целях дополнительного заработка было решено поставить четыре человека на мойку машин. Время обслуживания одной машины одним рабочим в среднем составляет 20 мин. Чтобы быстрее обслужить клиента, было решено, что все рабочие занимаются обслуживанием одной машины одновременно. Определить, насколько эффективна такая дисциплина обслуживания с точки зрения пропускной способности, а, следовательно, и получения дохода.

Задача 3. Используя условия второй задачи, определить эффективность системы с точки зрения уменьшения времени обслуживания, поскольку время пребывания машин в пробке ограничено.

Задача 4. Используя условия второй задачи, определить, на сколько увеличится пропускная способность системы, если производительность канала увеличится в два раза.

Задача 5. На сколько процентов вероятность обслуживания для n -канальной СМО с отказами и производительностью каждого канала μ больше вероятности обслуживания n -канальной СМО с отказами и взаимопомощью типа «все как один», если число каналов $n = 3$, а трафик обеих систем $\rho = 2$.

*Решения и ответы***Задача 1.**

Поскольку контора не принимает заявки на перевозку до тех пор, пока не выполнит текущий заказ (при этом задействованы все имеющиеся машины), модель данной СМО — многоканальная система с отказами и взаимопомощью между каналами типа «все как один».

Интенсивность входящего потока $\lambda = 3/12 = 0,25$ заявок в ч.

Интенсивность потока обслуживаний $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 1/12 = 0,083$ заявок в ч.

Определим необходимые характеристики эффективности данной СМО.

Вычисляем трафик системы:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,25}{0,083} \approx 3,012 \text{ (эрланга).}$$

Вероятность того, что заявка будет обслужена, (или относительная пропускная способность системы) равна

$$P_{об+} = Q_+ = n/(\rho + n) = 5/(3,012 + 5) = 0,624.$$

Вероятность того, что заявка получит отказ, равна:

$$P_{отк+} = \rho/(\rho + n) = 3,012/(3,012 + 5) = 0,376.$$

Таким образом, в среднем из 10 поступивших заявок 6 будут обслужены и 4 получают отказ. Среднее число заявок, которое контора может обслужить в единицу времени (в час), или абсолютная пропускная способность системы, определяется по формуле:

$A_+ = \lambda Q_+ = 0,25 \cdot 0,624 = 0,156$, следовательно, за рабочий день (12 ч) контора может обслужить $0,156 \cdot 12 = 1,872$, т. е. около 2 заявок.

Найдем среднее время обслуживания заявки:

$$\bar{t}_{об+} = \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{5 \cdot 0,083} = 2,410 \text{ ч.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе (или среднее время обслуживания по отношению ко всем заявкам как обслуженным, так и не обслуженным) определяем по формуле:

$$T_{сист+} = T_{об+} = \frac{Q_+}{n\mu} = \frac{0,624}{5 \cdot 0,083} = 1,504 \text{ ч.}$$

Посмотрим, как изменятся характеристики системы, если транспортная контора изменит порядок обслуживания заявок, а именно: каждая заявка будет обслуживаться только одной машиной, а приниматься заявки будут только в случае свободных машин. При такой дисциплине обслуживания контору можно рассматривать как пятиканальную СМО с отказами без взаимопомощи между каналами. Тогда вероятность отказа можно посчитать по формулам:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} = \left(1 + 3,012 + \frac{3,012^2}{2!} + \frac{3,012^3}{3!} + \frac{3,012^4}{4!} + \frac{3,012^5}{5!} \right)^{-1} = 0,054,$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{3,012^5}{5!} 0,054 = 2,066 \cdot 0,054 = 0,112.$$

Вероятность обслуживания, равная относительной пропускной способности:

$$P_{\text{об}} = Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,112 = 0,888.$$

Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda Q = 0,25 \cdot 0,888 = 0,222$.

Сравним данные показатели с показателями СМО при взаимопомощи между каналами: $A = 0,222$, $A_+ = 0,156$; $Q = 0,888$, $Q_+ = 0,624$.

Таким образом, с точки зрения пропускной способности, взаимопомощь типа «все как один» не эффективна.

Для СМО с отказами и параметрами: $n = 5$, $\bar{t}_{\text{об}} = 12$ ч, $\lambda = 0,25$ имеем среднее время обслуживания (относительно всех поступающих заявок):

$$T_{\text{сист}} = T_{\text{об}} = \frac{Q}{\mu} = P_{\text{об}} \bar{t}_{\text{об}} = 0,888 \cdot 12 = 10,656 \text{ ч.}$$

Для СМО со взаимопомощью каналов:

$$T_{\text{сист}+} = T_{\text{об}+} = 1,504 \text{ ч.}$$

Таким образом, среднее время обслуживания и пребывания заявки в системе в семь раз меньше ($10,656/1,504 = 7,085$) для СМО с взаимопомощью между каналами типа «все как один». Поэтому, если цель — снижение времени пребывания заявки в системе, то целесообразность взаимопомощи очевидна.

Ответ.

1) вероятность того, что очередная заявка получит отказ: $P_{\text{отк}+} \approx 0,376$;

2) вероятность того, что заявка будет обслужена: $P_{\text{об}+} \approx 0,624$;

3) среднее число заявок, которое контора может обслужить при данном режиме работы: $A_+ \approx 0,156$. За рабочий день (12 ч) контора может обслужить 1,872, т.е. около 2 заявок;

4) среднее время, которое контора тратит на обслуживание одной заявки, попавшей под обслуживание: $\bar{t}_{об+} = 2,4$ ч;

5) среднее время обслуживания по отношению ко всем заявкам (как обслуженным, так и не обслуженным): $T_{сист+} = T_{об+} \approx 1,504$ ч.

С точки зрения пропускной способности, взаимопомощь типа «все как один» неэффективна: относительная пропускная способность при этом снижается с 88,8 % до 62,4 %. Если же цель — снижение времени обслуживания заявки, то целесообразность взаимопомощи очевидна: среднее время обслуживания становится в пять раз меньше, а среднее время пребывания в системе (по отношению ко всем поступающим заявкам) — меньше в семь раз.

Задача 2.

Модель данной СМО — многоканальная система с отказами и взаимопомощью между каналами типа «все как один».

Параметры системы:

- 1) число каналов обслуживания $n = 4$;
- 2) интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 30/3 = 10$ заявок в час;
- 3) интенсивность потока обслуживаний одним каналом $\mu = 60/20 = 3$ заявки в час.

Трафик системы:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{3} \approx 3,333 \text{ (эрланга).}$$

Вероятность того, что заявка будет обслужена, равна

$$P_{об+} = Q_+ = n/(\rho + n) = 4/(3,333 + 4) \approx 0,545.$$

Вероятность того, что заявка получит отказ, равна:

$$P_{отк+} = \rho/(\rho + n) = 3,333/(3,333 + 4) \approx 0,455.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A_+ = \lambda Q_+ = 10 \cdot 0,545 = 5,45.$$

Найдем среднее время обслуживания заявки:

$$\bar{t}_{об+} = \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{4 \cdot 3} = 0,083 \text{ ч.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе (или среднее время обслуживания по отношению ко всем заявкам как обслуженным, так и не обслуженным) определим по формуле:

$$T_{\text{сист}+} = T_{\text{об}+} = \frac{Q_+}{n\mu} = \frac{0,545}{4 \cdot 3} = 0,045 \text{ ч.}$$

При обслуживании одной машины одним рабочим получим четырехканальную СМО с отказами без взаимопомощи между каналами. Тогда вероятность отказа можно подсчитать по формулам:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} = \left(1 + 3,333 + \frac{3,333^2}{2!} + \frac{3,333^3}{3!} + \frac{3,333^4}{4!} \right)^{-1} = 0,047,$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{3,333^4}{4!} 0,047 \approx 0,242.$$

Вероятность обслуживания, равная относительной пропускной способности,

$$P_{\text{об}} = Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,242 = 0,758.$$

Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda Q = 10 \cdot 0,758 = 7,58$.

Сравним данные показатели с показателями СМО при взаимопомощи между каналами: $A = 7,58$, $A_+ = 5,45$; $Q = 0,758$, $Q_+ = 0,545$.

Ответ.

С точки зрения пропускной способности и получения дохода, взаимопомощь типа «все как один» неэффективна: доля обслуживаемых заявок снижается на 21 %.

Задача 3.

Среднее время обслуживания при взаимопомощи типа «все как один» в рассматриваемой системе равно $\bar{t}_{\text{об}+} = \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{4 \cdot 3} = 0,083 \text{ ч.}$ В слу-

чае отказа от взаимопомощи среднее время обслуживания $\bar{t}_{\text{об}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{3} \approx 0,333 \text{ ч, т. е. в 4 раза больше.}$

Ответ. Если время ожидания в пробке меньше или ненамного больше 20 мин, т. е. $1/3 \text{ ч}$, то режим взаимопомощи становится эффективным, несмотря на его меньшую пропускную способность, т. к. при меньшей скорости обслуживания (в режиме без взаимопомощи) часть

машин, которые могли бы быть обслужены, уедут, не задерживаясь на обслуживание.

Задача 4.

Увеличим производительность канала в два раза: $\bar{t}_{об} = 10 \text{ мин} = \frac{1}{6} \text{ ч} \approx 0,167 \text{ ч}$,

т. е. $\mu = 60/10 = 6$ заявок в ч.

Трафик системы:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{6} \approx 1,667 \text{ (эрланга)}.$$

Относительная пропускная способность системы, равная вероятности того, что заявка будет обслужена, равна

$$Q_+ = P_{об+} = n/(\rho + n) = 4/(1,667 + 4) \approx 0,706.$$

Вероятность того, что заявка получит отказ, равна:

$$P_{отк+} = \rho/(\rho + n) = 1,667/(1,667 + 4) \approx 0,294.$$

Абсолютная пропускная способность: $A_+ = \lambda Q_+ = 10 \cdot 0,706 = 7,06$.

Среднее время обслуживания заявки:

$$\bar{t}_{об+} = \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{4 \cdot 6} = 0,042 \text{ ч}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе (или среднее время обслуживания по отношению ко всем заявкам как обслуженным, так и не обслуженным) определим по формуле:

$$T_{сист+} = T_{об+} = \frac{Q_+}{n\mu} = \frac{0,706}{4 \cdot 6} = 0,029 \text{ ч}.$$

Сравним полученные показатели с аналогичными в исходной системе (до увеличения производительности каналов). В исходной системе показатели были следующими: $A = 5,45$; $Q = 0,545$; $P_{отк} = 0,455$; $\bar{t}_{об} = 0,083$; $T_{сист} = 0,045$.

Абсолютная пропускная способность системы увеличилась на разность $A_+ - A = 7,06 - 5,45 = 1,61$ заявки.

Относительная пропускная способность системы увеличилась с $Q = 0,545$ до $Q_+ = 0,706$, т. е. с 54,5 % до 70,6 %.

Ответ. При увеличении производительности канала в два раза пропускная способность системы увеличилась на 16 %, вероятность отказа в обслуживании снизилась с 0,455 до 0,294.

Задача 5.

Вероятность того, что заявка будет обслужена, равна

$$P_{\text{об+}} = Q_+ = n/(\rho + n) = 3/(2 + 3) = 0,6.$$

В случае режима без взаимопомощи каналов вероятность отказа можно подсчитать по формулам:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \right)^{-1} \approx 0,158,$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{2^3}{3!} 0,158 \approx 0,211.$$

Вероятность обслуживания, равная относительной пропускной способности,

$$P_{\text{об}} = Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,211 = 0,789.$$

Увеличение пропускной способности составит

$$(0,789 - 0,60)100 = 18,9 \, \%.$$

Ответ. На 18,9%.

10.2. Система с неограниченной очередью и взаимопомощью между каналами типа «все как один»

Рассмотрим СМО с n каналами обслуживания ($n \geq 2$), у которой нет ограничений на длину очереди и на время ожидания заявки в очереди. Режим работы СМО допускает возможность обрабатывать одну заявку сразу всеми каналами, т.е. между каналами существует взаимопомощь типа «все как один». Такая СМО работает как одноканальная с неограниченной очередью и интенсивностью обработки в n раз выше интенсивности работы одного канала. Считаем, что число каналов не превышает критического числа: $n \leq n_{\text{кр}}$.

Состояния системы будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе:

S_0 — в системе нет заявок, все n каналов свободны, очереди нет;

S_1 — в системе одна заявка, все n каналов заняты ее обслуживанием, очереди нет;

S_2 — в системе две заявки, одна заявка под обслуживанием, все n каналов заняты ее обслуживанием, вторая заявка стоит в очереди;

S_3 — все каналы заняты обслуживанием одной заявки, две заявки стоят в очереди; ...;

S_k — в системе k заявок, одна заявка находится под обслуживанием, $(k - 1)$ заявок стоит в очереди, все n каналов заняты обслуживанием одной заявки; и т. д.

Поскольку очередь не ограничена по длине, система имеет бесконечное множество состояний.

Размеченный граф состояний системы имеет следующий вид (рис. 34).

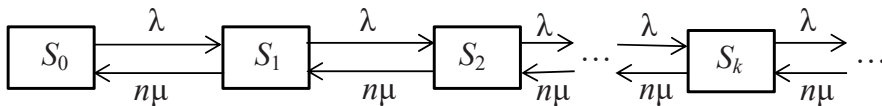


Рис. 34

Переход из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит с интенсивностью входящего потока заявок λ . Переход из состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит с интенсивностью потока обслуживаний $\phi(n) = n\mu$. Это имеет место при любых состояниях системы S_k , т. к. все каналы работают как один канал и одновременно приступают к обработке заявки и одновременно освобождаются от ее обслуживания, независимо от наличия и количества заявок в очереди.

Необходимое и достаточное условие, при котором с течением времени устанавливается стационарный режим и существуют предельные вероятности всех состояний системы, т. е. СМО справляется с обслуживанием потока заявок и длина очереди не растет до бесконечности, состоит в том, чтобы интенсивность потока входящих заявок была меньше интенсивности потока обслуживания системы:

$$\lambda < n\mu, \text{ т. е. } \boxed{\frac{\rho}{n} = \psi < 1.}$$

Все необходимые характеристики системы можно найти, взяв соответствующие формулы для одноканальной системы с неограниченной очередью и заменив в них параметр ρ на параметр ψ , т. е. уменьшив нагрузку на канал в n раз.

Указанным способом найдем предельную вероятность свободного (нулевого) состояния системы:

$$p_{0+} = \left(1 + \psi + \psi^2 + \dots + \psi^k + \dots\right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi^k\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\psi}\right)^{-1},$$

т. к. мы предполагаем, что $\psi < 1$ и, следовательно, ряд из членов геометрической прогрессии сходится.

Итак, найдено

$$p_{0+} = 1 - \psi = 1 - \frac{\rho}{n} = \frac{n - \rho}{n}.$$

Отсюда следует

$$p_{k+} = \psi^k (1 - \psi) = \left(\frac{\rho}{n}\right)^k \frac{n - \rho}{n}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Как во всякой системе с неограниченной очередью, в данной системе заявка не получает отказа в обслуживании, значит, вероятность такого отказа

$$P_{\text{отк}+} = 0,$$

вероятность заявке быть принятой в систему:

$$P_{\text{сист}+} = 1,$$

вероятность быть обслуженной:

$$P_{\text{об}+} = 1,$$

отсюда же следует, что относительная пропускная способность системы равна

$$Q_+ = 1 - P_{\text{отк}+} = 1,$$

абсолютная пропускная способность системы равна

$$A_+ = \lambda Q_+ = \lambda.$$

Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок равна

$$v_+ = A_+ = \lambda.$$

Делаем вывод, что взаимопомощь между каналами типа «все как один» на показатели $P_{\text{отк}}$, $P_{\text{об}}$, $P_{\text{сист}}$, Q , A , v не оказывает никакого влияния.

Среднее число заявок под обслуживанием найдем как отношение абсолютной пропускной способности системы к интенсивности потока обслуживания:

$$L_{\text{об}+} = \frac{A_+}{\varphi(n)} = \frac{A_+}{n\mu} = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\rho}{n} = \psi.$$

Но среднее число занятых каналов в системах со взаимопомощью каналов не равно среднему числу заявок, находящихся под обслуживанием. При взаимопомощи типа «все как один» среднее число занятых каналов в n раз больше среднего числа обслуживаемых заявок:

$$\bar{k}_+ \neq L_{\text{об}+}; \quad \bar{k}_+ = nL_{\text{об}+} = n\psi = \rho.$$

Это число можно найти общим методом как математическое ожидание числа занятых каналов:

$$\bar{k}_+ = 0 \cdot p_{0+} + n \cdot (1 - p_{0+}) = n(1 - (1 - \psi)) = n\psi = n \frac{\rho}{n} = \rho.$$

Итак, для рассматриваемой системы

$$\boxed{L_{\text{об}+} = \psi = \frac{\rho}{n};} \quad \boxed{\bar{k}_+ = n\psi = \rho;} \quad \boxed{\bar{k}_+ = nL_{\text{об}+}.}$$

Вероятность наличия очереди в системе найдем как единица минус вероятности состояний системы S_0 и S_1 , когда очереди в системе еще нет:

$$P_{\text{оч}+} = 1 - p_{0+} - p_{1+} = 1 - (1 - \psi) - \psi(1 - \psi) = \psi^2.$$

Таким образом,

$$\boxed{P_{\text{оч}+} = \psi^2 = \frac{\rho^2}{n^2}.}$$

Среднюю длину очереди, т. е. среднее число заявок в очереди, найдем, подставив в ранее полученную формулу

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

длины очереди для одноканальной СМО с неограниченной очередью вместо параметра ρ эквивалентный ему для рассматриваемой СМО параметр $\psi = \rho/n$.

Получим:

$$\boxed{L_{\text{оч}+} = \frac{\psi^2}{1 - \psi} = \frac{\rho^2}{n(n - \rho)}.}$$

Если учесть, что $P_{оч+} = \psi^2$, получим формулу связи длины очереди с вероятностью наличия очереди:

$$L_{оч+} = \frac{1}{1-\psi} \psi^2 = \frac{n}{(n-\rho)} \frac{\rho^2}{n^2} = \frac{1}{1-\psi} P_{оч+} = \frac{n}{n-\rho} P_{оч+}.$$

Среднее число заявок в системе найдем как сумму среднего числа заявок под обслуживанием и среднего числа заявок в очереди:

$$L_{сист+} = L_{об+} + L_{оч+} = \psi + \frac{\psi^2}{1-\psi} = \frac{\psi}{1-\psi}.$$

Окончательно получаем

$$L_{сист+} = \frac{\psi}{1-\psi} = \frac{\rho}{n-\rho}.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди, под обслуживанием и в системе получим по формулам Литтла:

$$T_{оч+} = \frac{L_{оч+}}{\lambda} = \frac{\psi^2}{\lambda(1-\psi)} = \frac{\rho^2}{\lambda n(n-\rho)},$$

$$T_{об+} = \frac{L_{об+}}{\lambda} = \frac{\psi}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda n} = \frac{1}{n\mu} = \bar{t}_{об+},$$

$$T_{сист+} = \frac{L_{сист+}}{\lambda} = \frac{\psi}{\lambda(1-\psi)} = \frac{\rho}{\lambda(n-\rho)} = \frac{1}{\mu(n-\rho)} = \frac{1}{n\mu - \lambda}.$$

Отметим, что в результате обслуживания всех поступающих в систему заявок, $T_{об+} = \bar{t}_{об+}$. Легко проверить и выполнение заведомо верного равенства

$$T_{сист+} = T_{оч+} + T_{об+} :$$

$$T_{оч+} + T_{об+} = \frac{\psi^2}{\lambda(1-\psi)} + \frac{\psi}{\lambda} = \frac{\psi^2 + \psi(1-\psi)}{\lambda(1-\psi)} = \frac{\psi}{\lambda(1-\psi)} = T_{сист+},$$

или

$$T_{оч+} + T_{об+} = \frac{\rho^2}{\lambda n(n-\rho)} + \frac{1}{n\mu} = \frac{\lambda + \mu(n-\rho)}{\mu^2 n(n-\rho)} = \frac{\mu n}{\mu^2 n(n-\rho)} = \frac{1}{\mu(n-\rho)} = T_{сист+}.$$

Сравним два режима работы многоканальной СМО с неограниченной очередью: без взаимопомощи каналов и со взаимопомощью типа «все как один».

При отсутствии взаимопомощи

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho^2}{n^2} + \dots \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-\rho} \right)^{-1}.$$

Сумма двух последних слагаемых выражения, стоящего в скобках правой части предыдущего равенства, меньше всей суммы, т. е.

$$\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-\rho} < p_0^{-1}.$$

Помножим обе части неравенства на ρ^2 и преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-\rho} \right) \rho^2 &= \frac{n\rho^{n+1}}{n!} + \frac{n\rho^{n+2}}{n!(n-\rho)} = \frac{\rho^{n+1}(n^2 - n\rho + n\rho)}{n!(n-\rho)} = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot n^2 < p_0^{-1} \rho^2. \end{aligned}$$

Умножим полученное неравенство на p_0 и поделим на n^2 :

$$\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 < \frac{\rho^2}{n^2}.$$

Принимая во внимание выведенные ранее выражения для

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 \text{ и } P_{\text{оч}+} = \frac{\rho^2}{n^2},$$

получим $P_{\text{оч}} < P_{\text{оч}+}$. В силу имеющихся равенств,

$$L_{\text{оч}} = \frac{n}{n-\rho} P_{\text{оч}} \text{ и } L_{\text{оч}+} = \frac{n}{n-\rho} P_{\text{оч}+},$$

делаем вывод, что $L_{\text{оч}} < L_{\text{оч}+}$.

Следовательно,

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} < \frac{L_{\text{оч}+}}{\lambda} = T_{\text{оч}+}.$$

Итак, при взаимодействии каналов вероятность попасть заявке в очередь увеличивается и, соответственно, увеличивается средняя длина очереди и среднее время, проводимое заявкой в очереди. При этом производительность системы не изменяется, т. к. относительная и абсолютная пропускные способности системы остаются прежними:

$$Q = Q_+ = 1, \quad A = A_+ = \lambda.$$

Вместе с тем, интенсивность обслуживания в системе с взаимопомощью между каналами типа «все как один» в n раз выше, чем в системе без такой взаимопомощи; среднее время пребывания заявки под обслуживанием в системе со взаимопомощью в n раз меньше, чем в системе без нее:

$$T_{об+} = \frac{1}{n\mu} < \frac{1}{\mu} = T_{об},$$

при условии, что каналы не мешают работе друг друга, т. е. при $n \leq n_{кр}$. Соответственно, и среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, в такой системе в n раз меньше, чем в системе без взаимопомощи:

$$L_{об+} = \psi = \frac{\rho}{n}; \quad L_{об} = \rho; \quad L_{об+} = \frac{1}{n} L_{об}.$$

Можно доказать, что вследствие этих причин среднее число заявок в системе и среднее время пребывания заявки в системе (несмотря на некоторое увеличение времени ожидания в очереди) уменьшается:

$$L_{сист+} < L_{сист}; \quad T_{сист+} < T_{сист}.$$

Подведем итоги. С введением взаимопомощи между каналами типа «все как один»:

- вероятность заявке попасть в очередь увеличивается:

$$P_{оч} < P_{оч+};$$

- средняя длина очереди увеличивается:

$$L_{оч} < L_{оч+};$$

- среднее время пребывания заявки в очереди увеличивается:

$$T_{оч} < T_{оч+};$$

- среднее число заявок под обслуживанием уменьшается в n раз:

$$L_{об+} = \frac{1}{n} L_{об};$$

- среднее время обслуживания заявки уменьшается в n раз:

$$T_{об+} = \frac{1}{n} T_{об};$$

- среднее число заявок в системе уменьшается:

$$L_{\text{сист}+} < L_{\text{сист}};$$

- среднее время пребывания заявки в системе уменьшается:

$$T_{\text{сист}+} < T_{\text{сист}};$$

- относительная пропускная способность остается прежней (100 %):

$$Q = Q_+ = 1;$$

- абсолютная пропускная способность остается прежней:

$$A = A_+ = \lambda.$$

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. Бригада грузчиков из шести человек работает на разгрузке трейлеров, прибывающих на овощную базу. Разгрузка одной машины производится одновременно всей бригадой, и если машина прибывает в момент, когда бригада занята, то она становится в очередь и ожидает обслуживания. В среднем на базу за один час прибывает одна машина. Один грузчик тратит на разгрузку трейлера в среднем четыре часа.

Оценить:

- 1) эффективность такой организации разгрузки с точки зрения времени, затрачиваемого на разгрузку одной машины;
- 2) эффективность организации разгрузки с точки зрения времени ожидания машин в очереди.

Задача 2. Ремонтная бригада по текущему ремонту трубопровода состоит из пяти человек. Поскольку работы не связаны с устранением аварийной ситуации, бригада работает по плану, в котором установлена очередность объектов, нуждающихся в профилактических мероприятиях и ремонте. В соответствии с планом бригада в полном составе выезжает на объект и приступает к ремонту очередного объекта только после окончания работ на прежнем объекте. В среднем за неделю поступает одна заявка. Один рабочий смог бы выполнить полный объем работ в среднем за две недели. Определить среднее время, необходимое бригаде для проведения работ на одном объекте.

Задача 3. Используя условия второй задачи, определить среднее число заявок в очереди и среднее время ожидания обслуживания заявки.

Задача 4. Используя условия второй задачи, найти вероятность того, что в очереди будет находиться не более четырех заявок.

Задача 5. Рассматривается работа n -канальной СМО с неограниченным ожиданием и взаимопомощью между каналами по типу «все как один». Известно, что в среднем заявка ожидает обслуживания 1 ч 20 мин. Интенсивность входящего потока $\lambda = 1$ (заявка в ч). Интенсивность потока обслуживания одним каналом $\mu = 0,25$ (заявки в ч). Сколько каналов участвует в обслуживании одной заявки одновременно?

Решения и ответы

Задача 1.

Модель данной системы массового обслуживания — многоканальная СМО с неограниченным ожиданием и взаимопомощью между каналами типа «все как один».

Параметры системы:

- 1) число каналов обслуживания (грузчиков) $n = 6$;
- 2) интенсивность входящего потока $\lambda = 1$ (машина в час);
- 3) среднее время обслуживания заявки одним каналом $\bar{t}_{об} = 4$ ч;
- 3) интенсивность обслуживания одним каналом $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 1/4 = 0,25$.

Определяем нагрузку системы, приходящуюся на один канал $\psi = 1/(6 \cdot 0,25) = 0,667$.

Среднее число заявок под обслуживанием: $L_{об+} = \psi = 0,667$.

Среднее время (в часах) обслуживания заявки: $T_{об+} = \frac{L_{об+}}{\lambda} = \frac{0,667}{1} = 0,667$.

Если сравнить данные показатели с показателями многоканальной СМО ($n = 6$) с неограниченным ожиданием, но без взаимопомощи между каналами (для такой СМО $L_{об} = \rho = \lambda/\mu = 4$, $T_{об} = \bar{t}_{об} = 4$ ч), то можно сделать вывод, что организация взаимопомощи между каналами по типу «все как один» позволяет значительно сократить среднее время обслуживания одной заявки (в шесть раз).

Показатель нагрузки системы, приходящейся на один канал, $\psi = 0,667$. Среднее число заявок в очереди (число машин):

$$L_{оч+} = \psi^2/(1 - \psi) = 0,667^2/(1 - 0,667) = 1,334.$$

Среднее время ожидания заявки (в часах) в очереди равно

$$T_{\text{оч+}} = L_{\text{оч+}}/\lambda = 1,334/1 = 1,334.$$

Сравнивая полученные характеристики с характеристиками системы без взаимопомощи каналов,

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{6!} + \frac{\rho^7}{6!(6-\rho)} \right)^{-1} = \\ &= \left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!} + \frac{4^7}{6!(6-4)} \right)^{-1} \approx 0,017, \\ L_{\text{оч}} &= \frac{\rho^{n+1} n}{n!(n-\rho)^2} p_0 = \frac{4^7 \cdot 6}{6!(6-4)^2} \cdot 0,017 \approx 34,133 \cdot 0,017 \approx 0,580, \\ T_{\text{оч}} &= \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{0,580}{1} = 0,580, \end{aligned}$$

приходим к выводу, что с точки зрения времени ожидания машин в очереди более эффективной является система без взаимопомощи каналов (быстрее в 2,3 раза).

Ответ.

1) с точки зрения времени, затрачиваемого на разгрузку одной машины, организация взаимопомощи между каналами по типу «все как один» эффективна: позволяет значительно сократить среднее время обслуживания одной заявки (в шесть раз);

2) с точки зрения времени ожидания машин в очереди более эффективной является система без взаимопомощи каналов (очередь движется быстрее в 2,3 раза).

Задача 2.

Модель данной системы массового обслуживания — многоканальная СМО с неограниченным ожиданием и взаимопомощью между каналами типа «все как один».

Параметры системы:

- 1) число каналов обслуживания (рабочих) $n = 5$;
- 2) интенсивность входящего потока $\lambda = 1$ заявка в неделю;
- 3) среднее время обслуживания заявки одним каналом $\bar{t}_{\text{об}} = 2$ недели;
- 4) интенсивность обслуживания одним каналом $\mu = 1/\bar{t}_{\text{об}} = 1/2 = 0,5$.

Определяем нагрузку системы, приходящуюся на один канал,

$$\psi = 1/(5 \cdot 0,5) = 0,4.$$

Среднее число заявок под обслуживанием: $L_{об+} = \psi = 0,4$.

Среднее время, необходимое бригаде для проведения работ на одном объекте, т. е. среднее время обслуживания заявки: $T_{об+} = \frac{L_{об+}}{\lambda} = \frac{0,4}{1} = 0,4$ недели.

Если сравнить данные показатели с показателями многоканальной СМО ($n = 5$) с неограниченным ожиданием, но без взаимопомощи между каналами (для такой СМО $L_{об} = \rho = \lambda/\mu = 2$, $T_{об} = \bar{t}_{об} = 2$ недели), то можно сделать вывод, что организация взаимопомощи между каналами по типу «все как один» позволяет в пять раз сократить среднее время обслуживания одной заявки.

Ответ. Среднее время, необходимое бригаде для проведения работ на одном объекте, $T_{об+} = 0,4$ недели.

Задача 3.

Показатель нагрузки системы, приходящейся на один канал, $\psi = 0,4$. Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч+} = \psi^2 / (1 - \psi) = 0,4^2 / (1 - 0,4) = 0,267.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди равно:

$$T_{оч+} = L_{оч+} / \lambda = 0,267 / 1 = 0,267 \text{ недели.}$$

Сравнивая полученные характеристики с характеристиками системы без взаимопомощи каналов ($\rho = 2$):

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{5!(5-\rho)} \right)^{-1} = \\ &= \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{5!(5-2)} \right)^{-1} \approx 0,134, \\ L_{оч} &= \frac{\rho^{n+1} n}{n!(n-\rho)^2} p_0 = \frac{2^6 \cdot 5}{5!(5-2)^2} \cdot 0,134 \approx 0,059 \cdot 0,134 \approx 0,008, \\ T_{оч} &= \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{0,008}{1} = 0,008 \text{ недели,} \end{aligned}$$

приходим к выводу, что с точки зрения времени ожидания заявки в очереди более эффективной является система без взаимопомощи каналов (быстрее в 33 раза).

Ответ. Среднее число заявок в очереди: $L_{\text{оч}+} \approx 0,267$; среднее время ожидания обслуживания: $T_{\text{оч}+} \approx 0,267$ недели.

Задача 4.

Нагрузка системы на один канал равна $\psi = 0,4$.

Вероятность того, что система находится в состоянии S_k , равна

$$p_{k+} = \psi^k (1 - \psi).$$

Вероятность наличия очереди: $P_{\text{оч}+} = \psi^2 = 0,4^2 = 0,16$.

Вероятность того, что очереди нет, равна $1 - 0,16 = 0,84$.

Вероятность того, что очереди нет или она есть, но в ней находится не более четырех заявок, найдем как сумму вероятностей состояний системы от S_0 до S_5 :

$$P(L_{\text{оч}+} \leq 4) = p_{0+} + p_{1+} + p_{2+} + p_{3+} + p_{4+} + p_{5+} = (1 + \psi + \psi^2 + \psi^3 + \psi^4 + \psi^5)(1 - \psi) = \\ = (1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + 0,0256 + 0,01024) \cdot 0,6 = 0,995904 \approx 0,996.$$

Вероятность того, что в очереди есть хотя бы одна заявка (т.е. очередь существует), но в ней находится не более четырех заявок, найдем как сумму вероятностей состояний системы от S_2 до S_5 :

$$P(1 \leq L_{\text{оч}+} \leq 4) = p_{2+} + p_{3+} + p_{4+} + p_{5+} = (\psi^2 + \psi^3 + \psi^4 + \psi^5)(1 - \psi) = \\ = (0,16 + 0,064 + 0,0256 + 0,01024) \cdot 0,6 = 0,25984 \cdot 0,6 = 0,155904 \approx 0,156.$$

Ответ. $P(L_{\text{оч}+} \leq 4) \approx 0,996$; $P(1 \leq L_{\text{оч}+} \leq 4) \approx 0,156$.

Задача 5.

Параметры СМО: $\lambda = 1$, $\mu = 0,25$. Известно среднее время ожидания обслуживания ($T_{\text{оч}+}$). Оно равно 1 ч 20 мин, т.е. $4/3$ ч. Нужно найти число взаимодействующих по типу «все как один» каналов. Известное n найдем из формулы для $T_{\text{оч}+}$:

$$T_{\text{оч}+} = \frac{L_{\text{оч}+}}{\lambda} = \frac{\psi^2}{\lambda(1 - \psi)} = \frac{\psi^2}{1 \cdot (1 - \psi)} = \frac{4}{3}, \quad \psi = \frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{1}{0,25n} = \frac{4}{n}.$$

Подставим $\psi = \frac{4}{n}$ в формулу для $T_{\text{оч}+}$ и получим квадратное уравнение для отыскания n . Затем найдем неотрицательный корень этого уравнения.

$$\frac{16n}{n^2(n-4)} = \frac{4}{3}, \quad \frac{4}{n(n-4)} = \frac{1}{3}, \quad n^2 - 4n - 12 = 0, \quad n = 6.$$

Ответ. $n = 6$.

10.3. Система с ограниченной очередью и взаимопомощью между каналами типа «все как один»

Рассмотрим СМО, имеющую n каналов обслуживания ($n \geq 2$), допускающую наличие ограниченной очереди, длиной не более m заявок ($m \geq 1$), и работающую в режиме взаимопомощи между каналами типа «все как один». Будем предполагать, что число каналов не превосходит критического числа: $n \leq n_{кр}$ и суммарная интенсивность обслуживания заявки пропорциональна числу имеющихся каналов: $\varphi(n) = n\mu$, где μ — интенсивность обслуживания заявки одним каналом. Интенсивность входящего потока заявок равна λ . Поток заявок и обслуживания — простейшие. Если заявка приходит в момент, когда все m мест в очереди заняты, она получает отказ и уходит из системы необслуженной.

Состояния системы будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе:

S_0 — в системе нет заявок, все n каналов свободны, очереди нет;

S_1 — в системе одна заявка, все каналы заняты ее обслуживанием, очереди нет;

S_2 — в системе две заявки, одна заявка под обслуживанием, все n каналов заняты ее обслуживанием, вторая заявка стоит в очереди;

S_3 — в системе три заявки, все каналы заняты обслуживанием одной заявки, две заявки стоят в очереди; ...;

S_{m+1} — в системе $m + 1$ заявка, одна заявка находится под обслуживанием, m заявок стоят в очереди, все n каналов заняты обслуживанием одной заявки, все места в очереди заняты, заявка, пришедшая в такой момент в систему, получает отказ.

Размеченный граф состояний такой системы имеет вид (рис. 35).

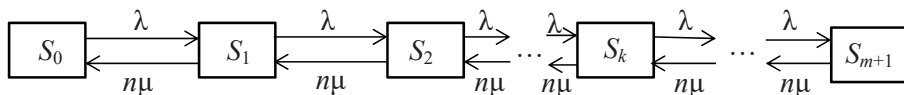


Рис. 35

Система работает как одноканальная СМО с ограниченной очередью с интенсивностью обслуживания заявки, равной $n\mu$. Число состояний

системы конечно (равно $m + 2$), переход из любого состояния в любое другое происходит за конечное время, поэтому предельные вероятности всех состояний системы существуют при любых значениях λ , μ и n .

Характеристики работы системы в стационарном режиме получим, заменяя в соответствующих формулах для одноканальной СМО с ограниченной очередью параметр $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ на параметр $\psi = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\rho}{n}$.

Показатели эффективности работы одноканальной СМО с ограниченной очередью были получены для двух случаев: $\rho \neq 1$ и $\rho = 1$.

Соответственно, рассмотрим два случая работы изучаемой СМО: $\psi \neq 1$ и $\psi = 1$.

Изучаемую СМО обозначим $СМО_+(n \geq 2; m)$, одноканальную СМО с ограниченной числом m очередью обозначим $СМО(n = 1; m)$.

Проведем параллельное сопоставление.

Показатель	СМО ($n = 1; m$), $\rho \neq 1$	СМО ₊ ($n \geq 2; m$), $\psi \neq 1$
Предельная вероятность свободного состояния системы	$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}$	$p_{0+} = \frac{1-\psi}{1-\psi^{m+1}}$
Предельные вероятности остальных состояний системы ($k = \overline{1, m+1}$)	$p_k = \rho^k p_0 = \rho^k \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}$	$p_{k+} = \psi^k p_{0+} = \psi^k \frac{1-\psi}{1-\psi^{m+1}}$
Вероятность отказа заявке в обслуживании	$P_{отк} = \rho^{m+1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$	$P_{отк+} = \psi^{m+1} \frac{1-\psi}{1-\psi^{m+2}}$
Вероятность наличия очереди	$P_{оч} = \rho^2 \frac{1-\rho^m}{1-\rho^{m+2}}$	$P_{оч+} = \psi^2 \frac{1-\psi^m}{1-\psi^{m+2}}$
Относительная пропускная способность системы	$Q = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}$	$Q_+ = \frac{1-\psi^{m+1}}{1-\psi^{m+2}}$
Абсолютная пропускная способность системы	$A = \lambda Q = \lambda \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}$	$A_+ = \lambda Q_+ = \lambda \frac{1-\psi^{m+1}}{1-\psi^{m+2}}$
Среднее число заявок под обслуживанием	$L_{об} = \rho Q = \rho \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}$	$L_{об+} = \psi Q_+ = \psi \frac{1-\psi^{m+1}}{1-\psi^{m+2}}$

Показатель	СМО ($n = 1; m$), $\rho \neq 1$	СМО ₊ ($n \geq 2; m$), $\psi \neq 1$
Среднее число заявок в очереди	$L_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)}$	$L_{\text{оч}+} = \psi^2 \frac{1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)}{(1 - \psi^{m+2})(1 - \psi)}$
Среднее число заявок в системе	$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}}$	$L_{\text{сист}+} = L_{\text{оч}+} + L_{\text{об}+}$

В случае, когда $\psi = 1$, формулы характеристик работы СМО₊ ($n \geq 2; m$) полностью совпадают с соответствующими формулами СМО ($n = 1; m$) при $\rho = 1$:

- предельная вероятность свободного состояния системы:

$$p_{0+} = \frac{1}{m+2};$$

- предельные вероятности остальных состояний системы ($k = \overline{1, m+1}$):

$$p_{k+} = \frac{1}{m+2};$$

- вероятность отказа заявке в обслуживании:

$$P_{\text{отк}+} = \frac{1}{m+2};$$

- вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{оч}+} = \frac{m}{m+2};$$

- относительная пропускная способность системы:

$$Q_+ = \frac{m+1}{m+2};$$

- абсолютная пропускная способность системы:

$$A_+ = \lambda Q_+ = \lambda \frac{m+1}{m+2};$$

- среднее число заявок под обслуживанием:

$$L_{\text{об}+} = \psi Q_+ = \frac{m+1}{m+2};$$

- среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}+} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)};$$

- среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}+} = \frac{m+1}{2}.$$

Среднее число занятых каналов в данной системе, как и в других системах со взаимопомощью между каналами типа «все как один», не равно среднему числу заявок, находящихся под обслуживанием, а в n раз больше:

$$\bar{k}_+ \neq L_{\text{об}+}, \quad \bar{k}_+ = nL_{\text{об}+}.$$

Однако в ней остаются справедливыми следующие равенства:

$$\bar{k}_+ = \frac{A_+}{\mu} = \rho Q_+.$$

В самом деле, т. к. $L_{\text{об}+} = \psi Q_+$, $\bar{k}_+ = nL_{\text{об}+}$, то

$$\bar{k}_+ = n\psi Q_+ = \rho Q_+ = \frac{A_+}{\mu}.$$

Очевидны также следующие равенства:

$$P_{\text{об}+} = P_{\text{сист}+} = 1 - P_{\text{отк}+} = Q_+,$$

т. е. вероятность того, что заявка будет обслужена, равна вероятности того, что заявка будет принята в систему (сразу на обслуживание или в очередь), и вероятности того, что заявке не будет отказано в обслуживании. В свою очередь, это равно относительной пропускной способности системы.

Интенсивность выходящего потока обслуженных заявок также остается равной абсолютной пропускной способности системы:

$$v_+ = A_+ = \lambda Q_+.$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, можно найти также по формуле:

$$L_{\text{об}+} = 1 - p_{0+}.$$

Среднее время, проведенное заявкой в очереди, на обслуживании и в системе в целом, определим по формулам Литтла:

$$\boxed{T_{оч+} = \frac{L_{оч+}}{\lambda}, \quad T_{об+} = \frac{L_{об+}}{\lambda}, \quad T_{сист+} = \frac{L_{сист+}}{\lambda}.}$$

Отметим, что среднее время обслуживания одной заявки $T_{об+}$, рассчитанное по отношению ко всем заявкам, поступающим в систему во входящем потоке, как обслуженным, так и получившим отказ в обслуживании, можно определить и по таким формулам:

$$\boxed{T_{об+} = \frac{Q_+}{\varphi(n)} = \frac{Q_+}{n\mu}, \quad T_{об+} = Q_+ \bar{t}_{об+},}$$

где $\bar{t}_{об+}$ — среднее время обслуживания одной заявки всеми каналами, рассчитанное по отношению только к обслуженным заявкам:

$$\bar{t}_{об+} = \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{n} \bar{t}_{об}.$$

Это время ($\bar{t}_{об+}$), естественно, в n раз меньше среднего времени обслуживания заявки одним каналом ($\bar{t}_{об}$).

Сравним показатели работы СМО в режиме без взаимопомощи каналов и в режиме со взаимопомощью. Можно доказать, подобно тому, как это было сделано в предыдущих случаях, что вероятность отказа заявке в обслуживании с введением взаимопомощи возрастает:

$$\boxed{P_{отк} < P_{отк+}}.$$

Точно так же возрастает и вероятность наличия очереди:

$$\boxed{P_{оч} < P_{оч+}}.$$

Поскольку $Q_+ = 1 - P_{отк+}$, а $Q = 1 - P_{отк}$, то отсюда следует, что

$$\boxed{Q_+ < Q},$$

и в силу того, что $A_+ = \lambda Q_+$, $A = \lambda Q$, делаем вывод, что

$$\boxed{A_+ < A}.$$

Таким образом, с введением взаимопомощи между каналами относительная и абсолютная производительность системы уменьшается. Из приведенных соотношений вытекает также, что

$$\boxed{T_{об+} = \frac{Q_+}{n\mu} < \frac{Q}{\mu} = T_{об},}$$

т. е. среднее время, проводимое заявкой под обслуживанием в системе со взаимопомощью каналов, меньше среднего времени,

затрачиваемого на обслуживание в системе без такого взаимодействия. Отсюда и из формул Литтла следует, что среднее число заявок под обслуживанием с введением взаимопомощи каналов уменьшается

$$L_{об+} < L_{об}.$$

В результате, несмотря на то что средняя длина очереди увеличивается и среднее время пребывания в очереди тоже увеличивается:

$$L_{оч} < L_{оч+}, \quad T_{оч} < T_{оч+},$$

среднее число элементов в системе и среднее время пребывания заявки в системе в случае введения режима взаимопомощи между каналами типа «все как один» уменьшаются:

$$L_{сист+} < L_{сист}, \quad T_{сист+} < T_{сист}.$$

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. Число мест в небольшом кафе ограничено и равно 11. В среднем кафе посещает шесть человек в час. Один повар смог бы приготовить заказ для одного клиента примерно за двадцать минут. Для того чтобы ускорить процесс приготовления заказа, применяется технология, в которой задействованы сразу все три повара, работающих в кафе. После выполнения заказа, принимается заявка от очередного посетителя. Если посетитель застает в кафе все места занятыми, он направляется в соседнее заведение. Определить пропускную способность данного кафе и определить эффективность системы с точки зрения времени, которое каждый посетитель ожидает в очереди, когда его обслужат.

Задача 2. Сравнить характеристики СМО первой задачи с характеристиками СМО, имеющей такие же параметры, но без взаимопомощи каналов.

Задача 3. Изменим условия первой задачи раздела 10.1 и предположим, что транспортная контора помимо текущего заказа принимает еще 2 заявки (т. е. допускается два места в очереди) и обслуживает их в порядке поступления, сохраняя дисциплину взаимопомощи по типу «все как один». Как изменятся характеристики системы?

Параметры системы:

- 1) число мест в очереди $m = 2$;

- 2) число каналов обслуживания $n = 5$;
- 3) интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 0,25$ (заявок в ч);
- 4) интенсивность потока обслуживаний одним каналом $\mu = 0,083$ (заявки в ч).

Задача 4. Как изменятся характеристики СМО во второй задаче раздела 10.1, если предположить, что при подъезде к мосту организована площадка для мойки машин, на которой может поместиться три машины.

Параметры системы:

- 1) число мест в очереди $m = 3$;
- 2) число каналов обслуживания $n = 4$;
- 3) интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 10$ (заявок в ч);
- 4) интенсивность потока обслуживаний одним каналом $\mu = 3$ (заявки в ч).

Решения и ответы

Задача 1.

Математической моделью работы данного кафе служит модель многоканальной СМО с ограниченным числом мест в очереди и взаимопомощью между каналами типа «все как один».

Параметры системы:

- 1) число мест в очереди $m = 10$;
- 2) число каналов обслуживания $n = 3$;
- 3) интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 6$ посетителей в час;
- 4) среднее время обслуживания одного посетителя одним поваром $\bar{t}_{\text{об}} = 20 \text{ мин} = 1/3 \text{ ч}$.

Интенсивность потока обслуживаний одним поваром $\mu = 1/\bar{t}_{\text{об}} = 3$ (заявки в час).

Определяем нагрузку системы, приходящуюся на один канал, $\psi = \lambda/(n\mu) = 6/(3 \cdot 3) = 0,667$, поэтому для определения характеристик эффективности воспользуемся формулами для $\psi \neq 1$.

Вероятность того, что все каналы простаивают, определяется по формуле

$$p_{0+} = (1 - \psi)/(1 - \psi^{m+2}) = (1 - 0,667)/(1 - 0,667^{10+2}) = 0,336.$$

Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}+} = \psi^{m+1} (1 - \psi)/(1 - \psi^{m+2}) = 0,667^{10+1} 0,336 \approx 0,004.$$

Относительная пропускная способность:

$$Q_+ = 1 - P_{\text{отк}+} = 1 - 0,004 = 0,996.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A_+ = \lambda Q_+ = 6 \cdot 0,996 = 5,976.$$

Таким образом, с точки зрения пропускной способности дисциплина обслуживания данной СМО достаточно эффективна (из 1000 посетителей, желающих пообедать в кафе, только 4 человека получают отказ).

Определим теперь среднее число посетителей в очереди по формуле

$$L_{\text{оч}+} = \frac{\psi^2 [1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)]}{(1 - \psi^{m+2})(1 - \psi)}.$$

$$L_{\text{оч}+} = \frac{0,667^2 [1 - 0,667^{10} (10 + 1 - 10 \cdot 0,667)]}{(1 - 0,667^{10+2})(1 - 0,667)} \approx 1,245.$$

Среднее время, которое каждый посетитель проводит в очереди, определяем по формуле Литтла:

$$T_{\text{оч}+} = \frac{L_{\text{оч}+}}{\lambda} \approx 1,245 / 6 = 0,2075 \text{ ч} = 12,45 \text{ мин.}$$

Вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{оч}+} = \psi^2 \frac{1 - \psi^m}{1 - \psi^{m+2}} \approx 0,667^2 \frac{1 - 0,667^{10}}{1 - 0,667^{12}} \approx 0,441.$$

Среднее число заявок под обслуживанием:

$$L_{\text{об}+} = \psi Q_+ \approx 0,667 \cdot 0,996 \approx 0,664.$$

Среднее число занятых каналов: $\bar{k} = n L_{\text{об}+} \approx 3 \cdot 0,664 = 1,992.$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}+} = L_{\text{оч}+} + L_{\text{об}+} \approx 1,245 + 0,664 = 1,909.$$

Среднее время под обслуживанием по отношению ко всем приходящим в систему заявкам: $T_{\text{об}+} = L_{\text{об}+} / \lambda \approx 0,664 / 6 \approx 0,1107 \text{ ч} \approx 6,64 \text{ мин.}$

Среднее время пребывания заявки в системе, т.е. ожидания в очереди и ожидания выполнения заказа: $T_{\text{сист}+} = L_{\text{сист}+} / \lambda \approx 1,909 / 6 \approx 0,3182 \text{ ч} \approx 19,09 \text{ мин.}$

Ответ. Пропускная способность выбранного режима работы кафе весьма высока: 99,6 % посетителей найдут свободные места в кафе и будут обслужены. Время ожидания заказа составляет в среднем 19 мин, из которых более 12 мин проходит в ожидании приема заказа и около 7 мин — его приготовления.

Задача 2.

Рассматриваемый режим работы соответствует многоканальной СМО с ограниченной очередью. Параметры системы:

$$n = 3; m = 10; \rho = 6/3 = 2.$$

Используя формулы для данной СМО, найдем ее характеристики:

$$p_0 \approx 0,112; P_{\text{отк}} \approx 0,0026 \approx 0,003; P_{\text{оч}} \approx 0,2937 \approx 0,294; Q \approx 0,997; A \approx 5,982;$$

$$L_{\text{об}} \approx 1,994; T_{\text{об}} \approx 0,3323 \text{ ч} \approx 19,94 \text{ мин}; L_{\text{оч}} \approx 0,830; T_{\text{оч}} \approx 0,1383 \text{ ч} \approx 8,30 \text{ мин}.$$

$$L_{\text{сист}} \approx 2,824; T_{\text{сист}} \approx 0,4707 \text{ ч} \approx 28,24 \text{ мин}.$$

В режиме без взаимопомощи пропускная способность системы составляет 99,7 %, среднее время ожидания приема заказа чуть больше 8 мин, но приготовление заказа занимает в среднем 20 мин. В результате общее время ожидания заказа длится примерно 28 мин.

Ответ. Сравнение режимов работы кафе показывает эффективность режима взаимопомощи типа «все как один». Незначительно снижая пропускную способность системы (с 99,7 % до 99,6 %), такой режим в три раза ускоряет выполнение заказа, и хотя он в 1,5 раза увеличивает время ожидания в очереди, но среднее время ожидания заказа сокращается почти на 10 мин.

Задача 3.

Параметры системы:

- 1) число мест в очереди $m = 2$;
- 2) число каналов обслуживания $n = 5$;
- 3) интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 0,25$ заявки в час;
- 4) интенсивность потока обслуживаний одним каналом $\mu = 0,083$ заявки в ч.

Определим нагрузку системы, приходящуюся на один канал:

$$\psi = \lambda / (n\mu) = 0,25 / (5 \cdot 0,083) = 0,602,$$

поэтому для определения характеристик эффективности воспользуемся формулами для $\psi \neq 1$.

Вероятность того, что все каналы простаивают, определяется по формуле

$$p_{0+} = (1 - \psi)/(1 - \psi^{m+2}) = (1 - 0,602)/(1 - 0,602^{2+2}) \approx 0,458.$$

Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}+} = \psi^{m+1} (1 - \psi)/(1 - \psi^{m+2}) = 0,602^{2+1} 0,458 \approx 0,100.$$

Относительная пропускная способность:

$$Q_+ = 1 - P_{\text{отк}+} = 1 - 0,100 = 0,900.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A_+ = \lambda Q_+ = 0,25 \cdot 0,900 = 0,225.$$

Определим теперь среднее число посетителей в очереди по формуле

$$L_{\text{оч}+} = \frac{\psi^2 [1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)]}{(1 - \psi^{m+2})(1 - \psi)}.$$

$$L_{\text{оч}+} = \frac{0,602^2 [1 - 0,602^2 (2 + 1 - 2 \cdot 0,602)]}{(1 - 0,602^{2+2})(1 - 0,602)} \approx 0,366.$$

Среднее время, которое каждый посетитель проводит в очереди, определяем по формуле Литтла:

$$T_{\text{оч}+} = \frac{L_{\text{оч}+}}{\lambda} \approx 0,366 / 0,25 = 1,464 \text{ ч.}$$

Вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{оч}+} = \psi^2 \frac{1 - \psi^m}{1 - \psi^{m+2}} \approx 0,602^2 \frac{1 - 0,602^2}{1 - 0,602^4} \approx 0,266.$$

Среднее число заявок под обслуживанием:

$$L_{\text{об}+} = \psi Q_+ \approx 0,602 \cdot 0,900 \approx 0,542.$$

Среднее число занятых каналов: $\bar{k} = n L_{\text{об}+} \approx 5 \cdot 0,542 = 2,71.$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}+} = L_{\text{оч}+} + L_{\text{об}+} \approx 0,366 + 0,542 = 0,908.$$

Среднее время под обслуживанием по отношению ко всем приходящим в систему заявкам $T_{\text{об}+} = L_{\text{об}+} / \lambda \approx 0,542 / 0,25 \approx 2,168 \text{ ч.}$

Среднее время пребывания заявки в системе, т. е. ожидания в очереди и ожидания выполнения заказа $T_{\text{сист}+} = L_{\text{сист}+} / \lambda \approx 0,908 / 0,25 \approx 3,632 \text{ ч.}$

Ответ. Наличие двух мест в очереди увеличивает пропускную способность системы с 62 % до 90 %, среднее число обслуживаемых за час заявок с 0,156 до 0,225. Эффективность работы СМО повышается за счет того, что у клиента возникает возможность ожидать обслуживания.

Задача 4.

Параметры системы:

- 1) число мест в очереди $m = 3$;
- 2) число каналов обслуживания $n = 4$;
- 3) интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 10$ заявок в ч;
- 4) интенсивность потока обслуживаний одним каналом $\mu = 3$ заявки в ч.

Определяем нагрузку системы, приходящуюся на один канал $\psi = \lambda / (n\mu) = 10 / (4 \cdot 3) = 0,833$, поэтому для определения характеристик эффективности воспользуемся формулами для $\psi \neq 1$.

Вероятность того, что все каналы простаивают, определяется по формуле

$$p_{0+} = (1 - \psi) / (1 - \psi^{m+2}) = (1 - 0,833) / (1 - 0,833^{3+2}) \approx 0,279.$$

Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}+} = \psi^{m+1} (1 - \psi) / (1 - \psi^{m+2}) = 0,833^{3+1} 0,279 \approx 0,134.$$

Относительная пропускная способность:

$$Q_+ = 1 - P_{\text{отк}+} = 1 - 0,134 = 0,866.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A_+ = \lambda Q_+ = 10 \cdot 0,866 = 8,66.$$

Определим теперь среднее число посетителей в очереди по формуле

$$L_{\text{оч}+} = \frac{\psi^2 [1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)]}{(1 - \psi^{m+2})(1 - \psi)}.$$

$$L_{\text{оч}+} = \frac{0,833^2 [1 - 0,833^3 (3 + 1 - 3 \cdot 0,833)]}{(1 - 0,833^{3+2})(1 - 0,833)} \approx 1,089.$$

Среднее время, которое каждый посетитель проводит в очереди, определяем по формуле Литтла:

$$T_{\text{оч}+} = \frac{L_{\text{оч}+}}{\lambda} \approx 1,089 / 10 = 0,1089 \text{ ч.}$$

Вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{оч}+} = \psi^2 \frac{1 - \psi^m}{1 - \psi^{m+2}} \approx 0,833^2 \frac{1 - 0,833^3}{1 - 0,833^5} \approx 0,489.$$

Среднее число заявок под обслуживанием:

$$L_{\text{об}+} = \psi Q_+ \approx 0,833 \cdot 0,866 \approx 0,721.$$

Среднее число занятых каналов: $\bar{k} = nL_{\text{об}+} \approx 4 \cdot 0,721 = 2,884.$

Среднее число заявок в системе: $L_{\text{сист}+} = L_{\text{оч}+} + L_{\text{об}+} \approx 1,089 + 0,721 = 1,81.$

Среднее время под обслуживанием по отношению ко всем приходящим в систему заявкам: $T_{\text{об}+} = L_{\text{об}+} / \lambda \approx 0,721 / 10 = 0,0721 \text{ ч.}$

Среднее время пребывания заявки в системе, т. е. ожидания в очереди и ожидания выполнения заказа: $T_{\text{сист}+} = L_{\text{сист}+} / \lambda \approx 1,81 / 10 = 0,181 \text{ ч.}$

Ответ. Возможность ждать обслуживания в очереди, для которой организовано 3 места, увеличивает относительную пропускную способность с 54,5 % до 86,6 %, т. е. на 32 %. Эффективность работы системы возрастает.

10.4. Особенности работы многоканальных СМО в режиме взаимопомощи каналов типа «все как один»

Отметим еще раз общие особенности работы СМО в режиме взаимодействия каналов типа «все как один».

Среднее число занятых каналов в этом режиме не равно среднему числу заявок, находящихся под обслуживанием, а в n раз больше:

$$\bar{k}_+ \neq L_{\text{об}+}, \quad \bar{k}_+ = nL_{\text{об}+}.$$

Если в системе есть очередь, то вероятность заявке попасть в очередь увеличивается, средняя длина очереди возрастает и среднее время ожидания в очереди увеличивается:

$$P_{\text{оч}} < P_{\text{оч}+}, \quad L_{\text{оч}} < L_{\text{оч}+}, \quad T_{\text{оч}} < T_{\text{оч}+}.$$

Если система может отказывать заявкам в обслуживании, то вероятность такого отказа увеличивается:

$$P_{\text{отк}} < P_{\text{отк}+}.$$

Если система не допускает неограниченной очереди, то относительная пропускная способность системы в таком режиме уменьшается:

$$Q_+ < Q,$$

и абсолютная пропускная способность системы уменьшается соответственно:

$$A_+ < A, \quad A_+ = \lambda Q_+.$$

Если же имеем СМО с неограниченной очередью, то относительная и абсолютная пропускные способности системы не меняются:

$$Q_+ = Q = 1, \quad A_+ = A = \lambda.$$

Среднее время обслуживания заявки с введением взаимопомощи значительно уменьшается: чем больше каналов принимают участие в таком взаимодействии (при $n \leq n_{\text{кр}}$), тем сильнее это проявляется:

$$T_{\text{об}+} < T_{\text{об}}, \quad T_{\text{об}+} = Q_+ \bar{t}_{\text{об}+}, \quad \bar{t}_{\text{об}+} = \frac{1}{n} \bar{t}_{\text{об}}.$$

В соответствии с этим уменьшается среднее число заявок под обслуживанием, среднее число заявок в системе и среднее время пребывания заявки в системе:

$$L_{\text{об}+} < L_{\text{об}},$$

$$L_{\text{сист}+} < L_{\text{сист}}, \quad T_{\text{сист}+} < T_{\text{сист}}.$$

Целесообразность введения такого режима работы СМО определяется приоритетными задачами обслуживания.

11. СМО с равномерной взаимопомощью между каналами

Рассмотренная ранее взаимопомощь между каналами типа «все как один», увеличивая интенсивность обслуживания, приводит к снижению производительности СМО (уменьшению относительной и абсолютной пропускных способностей) в случае ее работы с отказами без возможности образования очереди или с наличием ограниченной очереди. В случае с неограниченной очередью она приводит к увеличению длины очереди, среднего времени ожидания в очереди и вероятности попадания в очередь.

Это происходит в силу того, что заявка, пришедшая в тот момент, когда все каналы заняты обслуживанием одной ранее пришедшей заявки, получает отказ в обслуживании или отправляется в очередь. Чтобы избежать отмеченных недостатков, рассмотрим другой режим взаимодействия между

каналами, исключаящий такую ситуацию. Назовем условно следующий тип взаимодействия — равномерная взаимопомощь. Если в системе находится одна заявка, все каналы заняты ее обслуживанием. Если в этот момент в систему поступает новая заявка, часть каналов переключается на обслуживание новой заявки, а другие каналы продолжают обслуживать прежнюю заявку. Если в такой момент поступает третья заявка, снова происходит перераспределение каналов: часть каналов продолжает обслуживание первой заявки, часть обслуживает вторую заявку, а выделенная часть каналов начинает обслуживать третью заявку. Так происходит до тех пор, пока не наступает момент, когда каждый канал обслуживает только одну заявку. Если в такой ситуации поступает новая заявка, то она получает отказ в обслуживании (в СМО с отказами) или направляется в очередь (в СМО с очередью). Возникает вопрос, в какой пропорции делить каналы между заявками? Это зависит от вида функции $\varphi(n)$. Доказано, что если эта функция имеет вид линейной зависимости и $n \leq n_{кр}$, то неважно, какую часть

каналов выделять на обслуживание вновь прибывшей заявки, лишь бы все каналы были задействованы. В этом случае суммарная интенсивность обслуживания всегда будет максимальной, равной $n\mu$. В более общем случае, когда график функции $\varphi(n)$ выпуклый кверху, нужно распределять каналы по заявкам как можно более равномерно.

Рассмотрим режим равномерной взаимопомощи между каналами для нескольких типов СМО.

11.1. Система с отказами

СМО имеет n каналов. Возможен режим равномерной взаимопомощи. Выполнено условие $n \leq n_{кр}$. Не предусмотрено наличие очереди. Состояния системы нумеруем по числу заявок, находящихся в системе:

- S_0 — система свободна, т. е. каналы не заняты;
- S_1 — все каналы заняты, одна заявка обслуживается всеми каналами;
- S_2 — все каналы заняты, обслуживаются две заявки всеми каналами;
- S_3 — все каналы заняты, три заявки обслуживаются всеми n каналами; ...;
- S_k — все каналы заняты, k заявок обслуживаются всеми n каналами; ...;

S_n — n каналов обслуживают n заявок, каждый канал обслуживает одну заявку.

Заявка, пришедшая в тот момент, когда система находится в состоянии S_n , получает отказ и уходит из системы необслуженной.

Переход из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит с интенсивностью входящего потока заявок λ . Переход из состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит с интенсивностью суммарного потока обслуживаний $n\mu$.

Размеченный граф системы имеет вид (рис. 36).

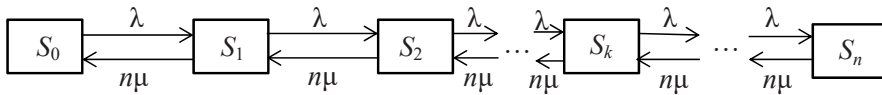


Рис. 36

Система работает как одноканальная система с ограниченной очередью с увеличенной интенсивностью обслуживания $\phi(n) = n\mu$ и числом мест в очереди $m = n - 1$.

Возьмем характеристики одноканальной системы с ограниченной очередью и подставим в формулы вместо параметра ρ параметр $\psi = \rho/n = \lambda/(n\mu)$, а вместо m величину $n - 1$. Получим характеристики работы исследуемой системы.

Рассмотрим случай, когда $\psi \neq 1$.

Предельные вероятности состояний системы:

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} \Rightarrow p_0 = \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{n+1}}.$$

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \rho^2 p_0, \quad \dots, \quad p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0.$$

Следовательно, в нашем случае

$$p_1 = \psi p_0, \quad p_2 = \psi^2 p_0, \quad \dots, \quad p_n = \psi^n p_0.$$

Вероятность отказа заявке в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = \rho^{m+1} p_0 = \rho^{m+1} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} \Rightarrow P_{\text{отк}} = \psi^n p_0 = \psi^n \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{n+1}}.$$

Относительная пропускная способность системы:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho^{m+2}} \Rightarrow Q = 1 - \psi^n p_0 = \frac{1 - \psi^n}{1 - \psi^{n+1}}$$

Абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda Q = \lambda \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho^{m+2}} \Rightarrow A = \lambda Q = \lambda \frac{1 - \psi^n}{1 - \psi^{n+1}}.$$

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, найдем как математическое ожидание этого случайного числа:

$$L_{об} = \sum_{k=1}^n k p_k = \sum_{k=1}^n k \psi^k p_0 = \psi p_0 \sum_{k=1}^n k \psi^{k-1} = \psi p_0 \left(\sum_{k=1}^n \psi^k \right)' = \psi p_0 \left(\frac{\psi(1 - \psi^n)}{1 - \psi} \right)'.$$

Найдя производную дроби, получим:

$$L_{об} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{(1 - \psi)^2} p_0 = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{(1 - \psi)(1 - \psi^{n+1})}.$$

Среднее число заявок в системе совпадает со средним числом заявок под обслуживанием, т. к. очереди нет, система с отказами:

$$L_{сист} = L_{об}.$$

Среднее число занятых каналов тоже можно найти как математическое ожидание:

$$\bar{k} = 0 p_0 + n(1 - p_0) = n(1 - p_0).$$

Коэффициент загрузки каналов:

$$k_{заг} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0.$$

Среднее время пребывания заявки под обслуживанием и в системе:

$$T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda} = T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\psi = 1$.

Нужные формулы можно получить, подставляя в формулы для одноканальной системы с ограниченной очередью при $\rho = 1$ вместо параметра m , от которого зависят все формулы, величину $n - 1$. Получим следующие выражения.

Предельные вероятности состояний системы:

$$p_0 = \frac{1}{n+1}; \quad p_k = p_0 = \frac{1}{n+1}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Вероятность наличия очереди (очереди нет) и вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{оч}} = 0; P_{\text{отк}} = p_n = p_0 = \frac{1}{n+1}.$$

Относительная и абсолютная пропускные способности системы:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{n}{n+1}; A = \lambda Q = \lambda \frac{n}{n+1}.$$

Среднее число занятых каналов и коэффициент загрузки каналов найдем так же, как и в общем случае:

$$\bar{k} = n(1 - p_0) = \frac{n^2}{n+1}; k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0 = \frac{n}{n+1}.$$

Очереди в данном случае на самом деле нет, поэтому $L_{\text{оч}} = 0$, а среднее число заявок под обслуживанием совпадает со средним числом заявок в системе, которое получим из формулы $L_{\text{сист}} = \frac{m+1}{2}$, путем указанной подстановки:

$$L_{\text{об}} = \frac{n}{2}; L_{\text{оч}} = 0; L_{\text{сист}} = L_{\text{об}} = \frac{n}{2}.$$

Среднее время определяется формулами Литтла:

$$T_{\text{об}} = \frac{n}{2\lambda}; T_{\text{оч}} = 0; T_{\text{сист}} = T_{\text{об}} = \frac{n}{2\lambda}.$$

11.2. Система с ограниченной очередью

Рассмотрим n -канальную СМО с очередью, ограниченной числом m . Возможен режим равномерной взаимопомощи. Выполнено условие $n \leq n_{\text{кр}}$. Состояния системы снова нумеруем по числу заявок, находящихся в системе:

S_0 — система свободна;

S_1 — одна заявка обслуживается всеми n каналами, очереди нет;

S_2 — две заявки обслуживаются всеми n каналами, очереди нет; ...;

S_n — n каналов обслуживают n заявок, каждый канал обслуживает одну заявку, очереди нет;

S_{n+1} — все каналы заняты, каждый канал обслуживает свою заявку, одна заявка стоит в очереди; ...;

S_{n+m} — n заявок обслуживаются n каналами, m заявок стоит в очереди. Все места в очереди заняты.

Заявка, пришедшая в тот момент, когда система находится в состоянии S_{n+m} , получает отказ и уходит из системы необслуженной.

Переход из произвольного состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит с интенсивностью входящего потока заявок λ . Переход из состояния S_k в состояние S_{k-1} происходит с интенсивностью суммарного потока обслуживаний $n\mu$ независимо от состояния системы (наличия или отсутствия очереди).

Размеченный граф системы имеет вид (рис. 37).

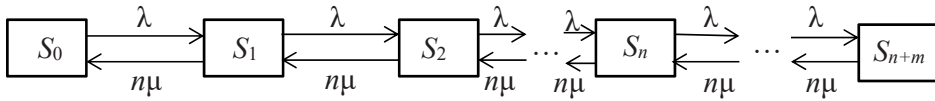


Рис. 37

Получили граф того же вида, что на рис. 36, но с увеличенным на m числом состояний. Значит, система работает как одноканальная система с ограниченной очередью с увеличенной интенсивностью обслуживания $\varphi(n) = n\mu$ и числом мест в очереди $(n + m - 1)$.

Снова возьмем характеристики одноканальной системы с ограниченной очередью и подставим в формулы вместо параметра ρ параметр $\psi = \rho/n = \lambda/(n\mu)$, а вместо m величину $(n + m - 1)$. Получим характеристики работы исследуемой системы при $\psi \neq 1$.

Предельные вероятности состояний системы:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \Rightarrow p_0 = \frac{1-\psi}{1-\psi^{n+m+1}}.$$

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \rho^2 p_0, \quad \dots, \quad p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0 \Rightarrow$$

$$p_1 = \psi p_0, \quad p_2 = \psi^2 p_0, \dots, p_n = \psi^n p_0, \dots, p_{n+m} = \psi^{n+m} p_0.$$

Вероятность отказа заявке в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = \rho^{m+1} p_0 = \rho^{m+1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \Rightarrow P_{\text{отк}} = \psi^{n+m} p_0 = \psi^{n+m} \frac{1-\psi}{1-\psi^{n+m+1}}.$$

Вероятность наличия очереди найдем как сумму вероятностей состояний системы от S_{n+1} до S_{n+m} или путем замены в формуле для одноканальной системы,

$$P_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} p_0 ,$$

множителя ρ^2 на ψ^{n+1} и остальных ρ на ψ :

$$P_{\text{оч}} = \psi^{n+1} \frac{1 - \psi^m}{1 - \psi} p_0 = \psi^{n+1} \frac{1 - \psi^m}{1 - \psi^{n+m+1}} .$$

Относительная пропускная способность системы:

$$Q = 1 - \rho^{m+1} p_0 = \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho^{m+2}} \Rightarrow Q = 1 - \psi^{n+m} p_0 = \frac{1 - \psi^{n+m}}{1 - \psi^{n+m+1}} .$$

Абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda (1 - \rho^{m+1} p_0) = \lambda \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho^{m+2}} \Rightarrow A = \lambda (1 - \psi^{n+m} p_0) = \lambda \frac{1 - \psi^{n+m}}{1 - \psi^{n+m+1}} .$$

Формула, выраженная через p_0 , для среднего числа заявок, находящихся под обслуживанием, останется той же, что и в предыдущем случае, т. к. число обслуживающих каналов не изменилось:

$$L_{\text{об}} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{(1 - \psi)^2} p_0 = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{(1 - \psi)(1 - \psi^{n+m+1})} .$$

Поскольку число мест в очереди остается равным m и только начало возникновения очереди переносится из состояния S_2 в одноканальной системе в состояние S_{n+1} в рассматриваемой системе, то среднее число заявок, стоящих в очереди, получим из формулы

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)}{(1 - \rho)^2} p_0$$

для одноканальной системы путем замены множителя ρ^2 перед дробью на множитель ψ^{n+1} и замены ρ в дроби соответственно на ψ .

Итак, среднее число заявок, стоящих в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \psi^{n+1} \frac{1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)}{(1 - \psi)^2} p_0 = \psi^{n+1} \frac{1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)}{(1 - \psi)(1 - \psi^{n+m+1})} .$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{об}} + L_{\text{оч}} .$$

Среднее число занятых каналов останется, как и в предыдущем случае, равным

$$\bar{k} = 0 p_0 + n(1 - p_0) = n(1 - p_0) .$$

Коэффициент загрузки каналов:

$$k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди, под обслуживанием и в системе найдем по формулам Литтла:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}, \quad T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda}, \quad T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}.$$

В частном случае при $\psi = 1$ подставим в формулы работы одноканальной СМО с ограниченной очередью при $\rho = 1$ вместо параметра m , от которого зависят все формулы, величину $(n + m - 1)$. Получим необходимые нам выражения.

Предельные вероятности состояний системы:

$$p_0 = \frac{1}{n + m + 1}, \quad p_k = p_0 = \frac{1}{n + m + 1}, \quad 1 \leq k \leq n + m.$$

Вероятность наличия очереди и вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{оч}} = mp_0 = \frac{m}{n + m + 1}, \quad P_{\text{отк}} = p_{n+m} = p_0 = \frac{1}{n + m + 1}.$$

Относительную и абсолютную пропускные способности системы:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{n + m}{n + m + 1}, \quad A = \lambda Q = \lambda \frac{n + m}{n + m + 1}.$$

Среднее число занятых каналов и коэффициент загрузки каналов найдем, как в общем случае:

$$\bar{k} = n(1 - p_0) = \frac{n(n + m)}{n + m + 1}, \quad k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0 = \frac{n + m}{n + m + 1}.$$

Среднее число заявок под обслуживанием и среднее число заявок в очереди найдем как математическое ожидание этих величин при состояниях системы от S_1 до S_n в первом случае и от S_{n+1} до S_{n+m} во втором случае:

$$L_{\text{об}} = \sum_{k=1}^n kp_k = \sum_{k=1}^n kp_0 = p_0(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2} p_0 = \frac{n(n+1)}{2(n+m+1)},$$

$$L_{\text{оч}} = \sum_{k=1}^m kp_{n+k} = \sum_{k=1}^m kp_0 = p_0(1 + 2 + \dots + m) = \frac{m(m+1)}{2} p_0 = \frac{m(m+1)}{2(n+m+1)};$$

в результате найдем среднее число заявок в системе:

$$L_{об} = \frac{n(n+1)}{2(n+m+1)}, \quad L_{оч} = \frac{m(m+1)}{2(n+m+1)}, \quad L_{сист} = L_{оч} + L_{об} = \frac{m(m+1) + n(n+1)}{2(n+m+1)}.$$

Среднее время найдем в соответствии с формулами Литтла:

$$T_{об} = \frac{n(n+1)}{2\lambda(n+m+1)}; \quad T_{оч} = \frac{m(m+1)}{2\lambda(n+m+1)}; \quad T_{сист} = \frac{m(m+1) + n(n+1)}{2\lambda(n+m+1)}.$$

11.3. Система с неограниченной очередью

Размеченный граф многоканальной системы с неограниченной очередью при равномерной взаимопомощи каналов имеет вид (рис. 38).

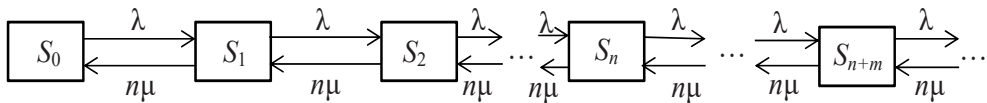


Рис. 38

Состояния системы нумеруются по числу заявок, находящихся в системе.

Эта система работает как одноканальная система с неограниченной очередью и увеличенной в n раз интенсивностью обработки заявки. Приведенная интенсивность потока заявок в этом случае $\psi = \lambda/(n\mu)$. Для того, чтобы длина очереди не увеличивалась до бесконечности и система оставалась работоспособной, чтобы существовали предельные вероятности состояний системы, необходимо выполнение условия: $\psi < 1$. Будем предполагать его выполненным. Будем также считать, что $n \leq n_{кр}$, т. е. каналы не мешают друг другу при совместном обслуживании одной заявки, интенсивность такого обслуживания пропорциональна числу обслуживающих каналов: $\mu(k) = k\mu$.

Особенностью этой системы является лишь то, что очередь начинается в ней образовываться не от состояния S_2 , как в одноканальной системе, а начиная от состояния S_{n+1} ; в периоды, когда система находится в состояниях от S_1 до S_n , очереди нет, заявки, находящиеся в системе, обрабатываются, т. е. находятся под обслуживанием. Если заявка при-

ходит в систему, когда та находится в состояниях $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$, то она сразу же попадает под обслуживание. Все n каналов при этом осуществляют обработку тех заявок, которые находятся в системе, распределяясь каким-либо образом по имеющимся заявкам.

Значение вероятности состояния S_0 найдем по формуле суммы всех членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$p_0 = (1 + \psi + \psi^2 + \psi^3 + \dots)^{-1} = \left(\frac{1}{1 - \psi} \right)^{-1} = 1 - \psi.$$

Вероятности остальных состояний системы:

$$p_k = \psi^k p_0 = \psi^k (1 - \psi), \quad 1 \leq k.$$

Формула, определяющая (в зависимости от p_0) среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, в этом варианте СМО та же, что и в ранее рассмотренных вариантах данного режима работы СМО, т. к. число обслуживающих каналов и режим обслуживания не изменились, изменился лишь характер очереди и значение вероятности нулевого состояния системы:

$$L_{\text{об}} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{(1 - \psi)^2} p_0.$$

С учетом значения $p_0 = 1 - \psi$, получаем

$$L_{\text{об}} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{(1 - \psi)^2} p_0 = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{(1 - \psi)}.$$

Вероятность наличия очереди найдем, суммируя вероятности всех состояний системы, начиная с состояния S_{n+1} :

$$P_{\text{оч}} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi^{n+k} p_0 = \psi^{n+1} p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \psi^{k-1} = \psi^{n+1} p_0 (1 + \psi + \psi^2 + \psi^3 + \dots) = \frac{\psi^{n+1}}{1 - \psi} p_0 = \psi^{n+1}.$$

Среднее число заявок в очереди найдем из соответствующей формулы для одноканальной системы с неограниченной очередью:

$$L_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1}{(1 - \rho)^2} p_0 = \rho^2 \frac{1}{1 - \rho},$$

путем замены множителя ρ^2 на ψ^{n+1} (т. к. в данном случае формирование очереди начинается с состояния S_{n+1} , а не S_2) и замены параметра ρ в дроби на ψ . Получим:

$$L_{\text{оч}} = \psi^{n+1} \frac{1}{(1-\psi)^2} p_0 = \psi^{n+1} \frac{1}{1-\psi}.$$

Итак, в данной системе предельные вероятности состояний:

$$p_0 = 1 - \psi, \quad p_k = \psi^k p_0 = \psi^k (1 - \psi), \quad 1 \leq k.$$

Вероятность наличия очереди:

$$P_{\text{оч}} = \frac{\psi^{n+1}}{1-\psi} p_0 = \psi^{n+1}.$$

Как во всякой СМО с неограниченной очередью,

$$P_{\text{отк}} = 0, \quad P_{\text{об}} = 1, \quad Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1, \quad A = \lambda Q = \lambda.$$

Среднее число занятых каналов и коэффициент загрузки каналов:

$$\bar{k} = n(1 - p_0) = n\psi = \rho, \quad k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0 = \psi.$$

Среднее число заявок под обслуживанием, в очереди и в системе:

$$L_{\text{об}} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{1 - \psi}, \quad L_{\text{оч}} = \frac{\psi^{n+1}}{(1-\psi)^2} p_0 = \frac{\psi^{n+1}}{1-\psi},$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = \psi \frac{1 - n\psi^n (1 - \psi)}{1 - \psi}.$$

Среднее время пребывания заявки под обслуживанием, в очереди и в системе:

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{\lambda(1 - \psi)}, \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{\psi^{n+1}}{\lambda(1 - \psi)},$$

$$T_{\text{сист}} = T_{\text{оч}} + T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \psi \frac{1 - n\psi^n (1 - \psi)}{\lambda(1 - \psi)}.$$

Задачи для проработки теоретического материала

Задача 1. Имеется трехканальная СМО с отказами: интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ (заявки в мин), среднее время обслуживания одной заявки одним каналом $\bar{t}_{\text{об}} = 0,5$ мин, функция $\mu(k) = k\mu$. Сравнить основные показатели работы СМО:

а) при отсутствии взаимопомощи;

- б) при взаимопомощи каналов типа «все как один»;
- в) при равномерной взаимопомощи между каналами.

Задача 2. Имеется трехканальная СМО с очередью, допускающей два места ($m = 2$): интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ (заявки в мин), среднее время обслуживания одной заявки одним каналом $\bar{t}_{об} = 0,5$ мин, функция $\mu(k) = k\mu$. Сравнить основные показатели работы СМО:

- а) при отсутствии взаимопомощи;
- б) при взаимопомощи каналов типа «все как один»;
- в) при равномерной взаимопомощи между каналами.

Задача 3. Имеется трехканальная СМО с неограниченной очередью: интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ (заявки в мин), среднее время обслуживания одной заявки одним каналом $\bar{t}_{об} = 0,5$ мин, функция $\mu(k) = k\mu$. Сравнить основные показатели работы СМО:

- а) при отсутствии взаимопомощи;
- б) при взаимопомощи каналов типа «все как один»;
- в) при равномерной взаимопомощи между каналами.

Решения и ответы

Задача 1.

$n = 3$, $\lambda = 4$, $\bar{t}_{об} = 0,5$, $\mu = 2$, $\rho = 2$. Ответом в задачах 1–3 является сам сравнительный анализ.

Определим основные показатели работы СМО:

а) без взаимопомощи:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3!} \right)^{-1} = \left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} \right)^{-1} \approx 0,158;$$

$$P_{отк} = \frac{2^3}{3!} p_0 \approx \frac{4}{3} \cdot 0,158 \approx 0,211;$$

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0,211 = 0,789;$$

$$A = \lambda Q = 4 \cdot 0,789 = 3,156;$$

$$L_{об} = L_{сист} = \bar{k} = \rho Q = 2 \cdot 0,789 = 1,578;$$

$$T_{об} = T_{сист} = \frac{L_{об}}{\lambda} = \frac{Q}{\mu} = Q \bar{t}_{об} = 0,789 \cdot 0,5 = 0,3945 \text{ мин.}$$

б) при взаимопомощи каналов типа «все как один»:

$$p_{0+} = \frac{n}{\rho + n} = \frac{3}{2 + 3} = 0,6;$$

$$P_{\text{отк}+} = \frac{\rho}{\rho + n} = \frac{2}{2 + 3} = 0,4;$$

$$Q_+ = 1 - P_{\text{отк}+} = 1 - 0,4 = 0,6;$$

$$A_+ = \lambda Q_+ = 4 \cdot 0,6 = 2,4;$$

$$\bar{k}_+ = \rho Q_+ = 2 \cdot 0,6 = 1,2;$$

$$L_{\text{об}+} = L_{\text{сист}+} = \frac{\rho}{\rho + n} = \frac{2}{2 + 3} = 0,4;$$

$$T_{\text{об}+} = T_{\text{сист}+} = \frac{1}{\lambda + n\mu} = \frac{1}{4 + 3 \cdot 2} = 0,1 \text{ мин.}$$

в) при равномерной взаимопомощи между каналами:

$$\psi = \rho/n = 2/3;$$

$$p_0^* = \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{n+1}} = \frac{1 - 2/3}{1 - (2/3)^4} = \frac{81}{3 \cdot 65} \approx 0,415;$$

$$P_{\text{отк}}^* = \psi^n p_0^* = (2/3)^3 \cdot 0,415 \approx 0,123;$$

$$Q^* = \frac{1 - \psi^n}{1 - \psi^{n+1}} = \frac{1 - (2/3)^3}{1 - (2/3)^4} = \frac{19 \cdot 3}{65} \approx 0,877;$$

$$A^* = \lambda Q^* \approx 4 \cdot 0,877 = 3,508;$$

$$\bar{k}^* = n(1 - p_0^*) \approx 3 \cdot (1 - 0,415) = 1,755;$$

$$L_{\text{об}}^* = L_{\text{сист}}^* = \psi \frac{1 - \psi^n(n + 1 - n\psi)}{(1 - \psi)(1 - \psi^{n+1})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - (2/3)^3(4 - 2)}{(1/3)(1 - (2/3)^4)} = \frac{66}{65} \approx 1,015;$$

$$T_{\text{об}}^* = T_{\text{сист}}^* = \frac{L_{\text{об}}^*}{\lambda} = \frac{1,015}{4} = 0,254 \text{ мин.}$$

Для анализа сведем полученные данные работы СМО в разных режимах в таблицу (см. ниже).

Показатели	СМО без взаимопомощи между каналами	СМО с взаимопомощью типа «все как один»	СМО с равномерной взаимопомощью между каналами
p_0	0,158	0,6	0,415

Показатели	СМО без взаимопомощи между каналами	СМО с взаимопомощью типа «все как один»	СМО с равномерной взаимопомощью между каналами
$P_{\text{отк}}$	0,211	0,4	0,123
Q	0,789	0,6	0,877
A	3,156	2,4	3,508
$\bar{k}$	1,578	1,2	1,755
$L_{\text{об}}$	1,578	0,4	1,015
$T_{\text{об}}$	0,3945	0,1	0,254

При сравнении режимов работы системы видно, что режим взаимопомощи типа «все как один» приводит к уменьшению относительной и абсолютной пропускных способностей системы, среднего числа занятых каналов, среднего числа заявок под обслуживанием и почти в четыре раза среднего времени пребывания заявки под обслуживанием. При этом почти в два раза увеличивается вероятность отказа заявке в обслуживании и почти в четыре раза вероятность простоя сразу всех трех каналов (отсутствия в системе заявок). Таким образом, за счет увеличения интенсивности обслуживания теряется возможность обслужить определенную часть заявок и снижается производительность системы.

В режиме с равномерной взаимопомощью между каналами происходит уменьшение вероятности отказа заявке в обслуживании, увеличение относительной и абсолютной пропускных способностей СМО и среднего числа занятых каналов. Происходит также уменьшение среднего числа заявок под обслуживанием и среднего времени обслуживания заявки, но в меньших размерах, чем в случае взаимопомощи типа «все как один». Таким образом, в этом режиме увеличивается производительность системы и увеличивается (хотя и в меньшей степени, чем в режиме «все как один») интенсивность обслуживания.

Задача 2.

$n = 3, m = 2, \lambda = 4, \bar{t}_{\text{об}} = 0,5, \mu = 2, \rho = 2, \psi = \rho/n = 2/3$.

Определим основные показатели работы СМО:

а) без взаимопомощи:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4(1 - (\rho/3)^2)}{3 \cdot 3!(1 - \rho/3)} \right)^{-1} = \left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} + \frac{16 \cdot 5}{9 \cdot 6} \right)^{-1} \approx 0,128;$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 = \frac{2^5}{3^2 \cdot 3!} p_0 \approx \frac{32}{9 \cdot 6} \cdot 0,128 \approx 0,076;$$

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{3+1} (1 - (\rho/3)^2)}{3 \cdot 3! (1 - (\rho/3))} p_0 = \frac{2^4 \cdot 5}{9 \cdot 6} \cdot 0,128 \approx 0,190;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} \approx 1 - 0,076 \approx 0,924;$$

$$A = \lambda Q \approx 4 \cdot 0,924 = 3,696;$$

$$L_{\text{об}} = \bar{k} = \rho Q = 2 \cdot 0,924 = 1,848;$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)}{(1 - \psi)^2} p_0 = \frac{16}{3 \cdot 6} \cdot \frac{27 - 4 \cdot 5}{3} \cdot 0,128 \approx 0,265;$$

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{об}} + L_{\text{оч}} \approx 1,848 + 0,265 = 2,113;$$

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} \approx \frac{1,848}{4} = 0,462 \text{ мин};$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} \approx \frac{0,265}{4} \approx 0,066 \text{ мин};$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} \approx \frac{2,113}{4} \approx 0,528 \text{ мин.}$$

б) при взаимопомощи каналов типа «все как один»:

$$p_{0+} = \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{m+2}} = \frac{1 - 2/3}{1 - (2/3)^4} = \frac{27}{81 - 16} \approx 0,415;$$

$$P_{\text{отк}+} = \psi^{m+1} \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{m+2}} = \frac{2^3}{3^3} \frac{1 - 2/3}{1 - (2/3)^4} = \frac{8}{65} \approx 0,123;$$

$$P_{\text{оч}+} = \psi^2 \frac{1 - \psi^m}{1 - \psi^{m+2}} = \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{1 - (2/3)^2}{1 - (2/3)^4} = \frac{4 \cdot 5}{65} \approx 0,3077;$$

$$Q_+ = 1 - P_{\text{отк}+} \approx 1 - 0,123 = 0,877;$$

$$A_+ = \lambda Q_+ \approx 4 \cdot 0,877 = 3,508;$$

$$L_{\text{об}+} = \psi Q_+ \approx \frac{2}{3} \cdot 0,877 \approx 0,585;$$

$$\bar{k}_+ = n L_{\text{об}+} \approx 3 \cdot 0,5847 \approx 1,754;$$

$$L_{\text{оч}+} = \psi^2 \frac{1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)}{(1 - \psi^{m+2})(1 - \psi)} = \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{1 - (2/3)^2 (3 - 4/3)}{(1 - (2/3)^4)(1 - 2/3)} = \frac{4 \cdot 7}{65} \approx 0,431;$$

$$L_{\text{сист}+} = L_{\text{об}+} + L_{\text{оч}+} \approx 0,5847 + 0,431 \approx 1,016;$$

$$T_{\text{об}+} = \frac{L_{\text{об}+}}{\lambda} \approx \frac{0,585}{4} \approx 0,146 \text{ мин};$$

$$T_{\text{оч}+} = \frac{L_{\text{оч}+}}{\lambda} \approx \frac{0,431}{4} \approx 0,108 \text{ мин};$$

$$T_{\text{сист}+} = \frac{L_{\text{сист}+}}{\lambda} \approx \frac{1,016}{4} = 0,254 \text{ мин.}$$

в) при равномерной взаимопомощи между каналами:

$$\psi = \rho/n = 2/3;$$

$$p_0^* = \frac{1-\psi}{1-\psi^{n+m+1}} = \frac{1-2/3}{1-(2/3)^6} = \frac{729}{3 \cdot 665} \approx 0,365;$$

$$P_{\text{отк}}^* = \psi^{n+m} p_0^* = (2/3)^5 \cdot 0,365 \approx 0,048;$$

$$P_{\text{оч}}^* = \psi^{n+1} \frac{1-\psi^m}{1-\psi^{n+m+1}} = \frac{2^4}{3^4} \cdot \frac{1-(2/3)^2}{1-(2/3)^6} = \frac{16 \cdot 5}{665} \approx 0,120;$$

$$Q^* = 1 - P_{\text{отк}}^* \approx 1 - 0,048 = 0,952;$$

$$A^* = \lambda Q^* \approx 4 \cdot 0,952 = 3,808;$$

$$\bar{k}^* = n(1 - p_0^*) \approx 3 \cdot (1 - 0,365) = 1,905;$$

$$L_{\text{об}}^* = \psi \frac{1-\psi^n(n+1-n\psi)}{(1-\psi)(1-\psi^{n+m+1})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-(2/3)^3 \cdot 2}{(1/3)(1-(2/3)^6)} = \frac{22 \cdot 27}{665} \approx 0,893;$$

$$L_{\text{оч}}^* = \psi^{n+1} \frac{1-\psi^m(m+1-m\psi)}{(1-\psi)(1-\psi^{n+m+1})} = \frac{2^4}{3^4} \cdot \frac{1-(2/3)^2(3-4/3)}{(1-2/3)(1-(2/3)^6)} = \frac{16 \cdot 7}{665} \approx 0,168;$$

$$L_{\text{сист}}^* = L_{\text{оч}}^* + L_{\text{об}}^* \approx 0,168 + 0,893 = 1,061;$$

$$T_{\text{об}}^* = \frac{L_{\text{об}}^*}{\lambda} \approx \frac{0,893}{4} \approx 0,223 \text{ мин};$$

$$T_{\text{оч}}^* = \frac{L_{\text{оч}}^*}{\lambda} \approx \frac{0,168}{4} = 0,042 \text{ мин};$$

$$T_{\text{сист}}^* = \frac{L_{\text{сист}}^*}{\lambda} \approx \frac{1,061}{4} \approx 0,265 \text{ мин.}$$

Для анализа сведем полученные данные работы СМО в разных режимах в таблицу (см. ниже).

Показатели	СМО без взаимопомощи между каналами	СМО с взаимопомощью типа «все как один»	СМО с равномерной взаимопомощью между каналами
p_0	0,128	0,415	0,365
$P_{отк}$	0,076	0,123	0,048
$P_{оч}$	0,190	0,308	0,120
Q	0,924	0,877	0,952
A	3,696	3,508	3,808
$\bar{k}$	1,848	1,754	1,905
$L_{об}$	1,848	0,585	0,893
$L_{оч}$	0,265	0,431	0,168
$L_{сист}$	2,113	1,016	1,061
$T_{об}$	0,462	0,146	0,223
$T_{оч}$	0,066	0,108	0,042
$T_{сист}$	0,528	0,254	0,265

Сравнение режимов работы СМО показывает сохранение тех же тенденций, что и в предыдущем примере. В режиме взаимопомощи типа «все как один» увеличиваются вероятности образования очереди и отказа заявке в обслуживании, увеличивается вероятность простоя системы (когда в системе нет ни одной заявки), увеличивается также средняя длина очереди и среднее время пребывания заявки в очереди. Происходит уменьшение среднего числа занятых каналов и снижение относительной и абсолютной пропускных способностей системы. При этом за счет увеличенной в три раза интенсивности обслуживания (все три канала одновременно обрабатывают одну заявку) среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, и среднее число заявок, находящихся в системе, а также среднее время пребывания заявки под обслуживанием и в системе заметно снижается. Таким образом, заявка обслуживается быстрее, но производительность системы снижается, очередь становится длиннее и время пребывания заявки в очереди увеличивается.

В режиме равномерной взаимопомощи каналов наблюдается уменьшение вероятности отказа заявке в обслуживании и вероятности об-

разования очереди, увеличение относительной и абсолютной пропускных способностей системы и среднего числа занятых каналов, уменьшение среднего числа заявок в очереди, под обслуживанием и в системе. Следовательно, снижается и среднее время, проводимое заявкой в очереди, под обслуживанием и в системе. Таким образом, несмотря на меньшую по сравнению с предыдущим режимом взаимопомощи среднюю интенсивность обслуживания заявки, данный режим обеспечивает и ускорение обработки заявки, и повышение производительности системы. Средняя интенсивность обслуживания заявки в этом режиме увеличилась примерно в два раза, но среднее время нахождения заявки в системе (0,265 мин) оказалось незначительно больше такого же времени (0,254 мин) в режиме взаимопомощи типа «все как один» и почти в два раза меньше, чем при отсутствии взаимопомощи между каналами (0,528 мин). Доля обслуженных заявок возросла до 95,2 % по сравнению с 92,4 % при отсутствии взаимодействия и 87,7 % в режиме взаимодействия «все как один».

Задача 3.

$$n = 3, m = \infty, \lambda = 4, \bar{t}_{об} = 0,5, \mu = 2, \rho = 2, \psi = \rho/n = 2/3.$$

Определим основные показатели работы СМО:

а) без взаимопомощи:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3!(3-\rho)} \right)^{-1} = \left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} + \frac{16}{6} \right)^{-1} \approx 0,111;$$

$$P_{отк} = 0;$$

$$P_{оч} = \frac{\rho^{3+1}}{3!(3-\rho)} p_0 \approx \frac{2^4}{6} \cdot 0,111 = 0,296;$$

$$Q = 1;$$

$$A = \lambda Q = 4 \cdot 1 = 4;$$

$$L_{об} = \bar{k} = \rho Q = \rho = 2;$$

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{n}{(n-\rho)^2} p_0 \approx \frac{16}{6} \cdot \frac{3}{1} \cdot 0,111 = 0,888;$$

$$L_{сист} = L_{об} + L_{оч} \approx 2 + 0,888 = 2,888;$$

$$T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ мин};$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} \approx \frac{0,888}{4} = 0,222 \text{ мин};$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} \approx \frac{2,888}{4} = 0,722 \text{ мин.}$$

б) при взаимопомощи каналов типа «все как один»:

$$p_{0+} = 1 - \psi = 1/3 \approx 0,333;$$

$$P_{\text{отк}+} = 0;$$

$$P_{\text{оч}+} = \psi^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \approx 0,444;$$

$$Q_+ = 1;$$

$$A_+ = \lambda = 4;$$

$$L_{\text{об}+} = \psi = \frac{2}{3} \approx 0,667;$$

$$\bar{k}_+ = nL_{\text{об}+} = \rho = 2;$$

$$L_{\text{оч}+} = \frac{\psi^2}{1-\psi} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,333;$$

$$L_{\text{сист}+} = L_{\text{об}+} + L_{\text{оч}+} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2;$$

$$T_{\text{об}+} = \frac{L_{\text{об}+}}{\lambda} \approx \frac{0,667}{4} \approx 0,167 \text{ мин};$$

$$T_{\text{оч}+} = \frac{L_{\text{оч}+}}{\lambda} \approx \frac{1,333}{4} \approx 0,333 \text{ мин};$$

$$T_{\text{сист}+} = \frac{L_{\text{сист}+}}{\lambda} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ мин.}$$

в) при равномерной взаимопомощи между каналами:

$$\psi = \rho/n = 2/3;$$

$$p_0^* = 1 - \psi = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0,333;$$

$$P_{\text{отк}}^* = 0;$$

$$P_{\text{оч}}^* = \psi^{n+1} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \approx 0,198;$$

$$Q^* = 1;$$

$$A^* = \lambda = 4;$$

$$\bar{k}^* = n(1 - p_0^*) = n\psi = \rho = 2;$$

$$L_{об}^* = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{(1 - \psi)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - (2/3)^3 \cdot 2}{(1/3)} = \frac{22}{27} \approx 0,815;$$

$$L_{оч}^* = \frac{\psi^{n+1}}{1 - \psi} = \frac{2^4 \cdot 3}{3^4} = \frac{16}{27} \approx 0,593;$$

$$L_{сист}^* = L_{оч}^* + L_{об}^* \approx 0,593 + 0,815 = 1,408;$$

$$T_{об}^* = \frac{L_{об}^*}{\lambda} \approx \frac{0,815}{4} \approx 0,204 \text{ мин};$$

$$T_{оч}^* = \frac{L_{оч}^*}{\lambda} \approx \frac{0,593}{4} \approx 0,148 \text{ мин};$$

$$T_{сист}^* = \frac{L_{сист}^*}{\lambda} \approx \frac{1,408}{4} = 0,352 \text{ мин}.$$

Для анализа сведем полученные данные работы СМО в разных режимах в таблицу (см. ниже).

Показатели	СМО без взаимопомощи между каналами	СМО с взаимопомощью типа «все как один»	СМО с равномерной взаимопомощью между каналами
p_0	0,111	0,333	0,333
$P_{отк}$	0	0	0
$P_{оч}$	0,296	0,444	0,198
Q	1,0	1,0	1,0
A	4,0	4,0	4,0
$\bar{k}$	2,0	2,0	2,0
$L_{об}$	2,0	0,667	0,815
$L_{оч}$	0,888	1,333	0,593
$L_{сист}$	2,888	2,0	1,408
$T_{об}$	0,5	0,167	0,204
$T_{оч}$	0,222	0,333	0,148
$T_{сист}$	0,722	0,5	0,352

Сравнение режимов работы СМО показывает, что с введением равномерной взаимопомощи между каналами уменьшается вероятность наличия очереди и, следовательно, среднее число заявок в очереди становится меньше. Среднее время обслуживания заявки также уменьшается, что приводит к снижению среднего числа заявок, находящихся под обслуживанием. Среднее время ожидания заявки в очереди тоже снижается. В силу этого среднее время пребывания заявки в системе уменьшается примерно вдвое (с 0,722 до 0,352 мин) и среднее число заявок в системе становится меньше примерно в той же пропорции.

Режим взаимопомощи «все как один» приводит наряду со снижением среднего времени обработки и нахождения заявки в системе к увеличению вероятности наличия очереди, среднего времени ожидания заявки в очереди, увеличению средней длины очереди. Несмотря на повышенную в три раза интенсивность обслуживания, заявка проводит в среднем больше времени, находясь в очереди, чем при других режимах работы. В результате среднее время пребывания ее в системе (0,5 мин), будучи меньше, чем в случае режима без взаимодействия каналов (0,722 мин), остается больше, чем при равномерном взаимодействии между каналами (0,352). Доля обслуженных заявок при условии существования предельных вероятностей состояний системы ($\psi < 1$) остается одинаковой во всех режимах — равной 100 %.

Таким образом, для данной СМО наиболее благоприятным является режим равномерной взаимопомощи между каналами, но не следует забывать, что такой режим не всегда бывает возможным в реальных ситуациях.



Индивидуальные домашние задания по ТМО

Индивидуальные задания предназначены для отработки методов расчета рассмотренных типов СМО. Вариант задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы. Выполненное задание предоставляется в формате *Word* или PDF с приведением полного расчета всех показателей. Ответы для каждого типа СМО выписываются отдельно в систематизированном виде. Диаграммы Ганта для 1 части ИДЗ могут быть выполнены вручную и прикреплены к файлу.

Часть 1

1. Решить задачу минимизации суммарного штрафа.
2. Решить задачу «директора» (одного станка).
3. Решить задачу двух станков.

Варианты ИДЗ

Вариант 1										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	14	12	19	15	9	8	10	7	16
	C_i	5	4	6	3	4	5	3	8	4
Зад. 2	T_j	30	40	25	15	35	10	45	50	20
Зад. 3	A	9	8	6	7	2	5	4	3	10
	B	1	6	5	8	4	3	2	6	7

Вариант 2										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	5	8	6	9	4	3	1	2	6
	C_i	9	2	6	5	3	1	4	7	2
Зад. 2	T_j	60	40	25	15	35	10	15	45	30
Зад. 3	A	19	8	14	7	12	15	9	3	5
	B	2	9	15	8	14	13	10	6	7

Вариант 3										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	4	6	8	5	3	9	6	7	2
	C_i	5	3	6	2	4	5	3	8	1
Зад. 2	T_j	40	20	35	15	45	10	25	50	30
Зад. 3	A	6	8	4	7	2	5	7	3	9
	B	2	3	5	4	5	3	1	6	7

Вариант 4										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	8	6	7	1	3	9	6	8	2
	C_i	5	3	6	2	4	5	3	8	1
Зад. 2	T_j	25	10	30	15	40	35	20	50	45
Зад. 3	A	7	9	4	5	3	2	7	3	6
	B	2	4	3	6	5	3	1	4	7

Вариант 5										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	12	16	18	15	13	19	16	17	12
	C_i	15	13	16	12	14	15	13	18	10
Зад. 2	T_j	50	20	45	35	15	10	25	60	40
Зад. 3	A	16	18	14	17	12	5	17	13	19
	B	12	13	15	14	15	13	10	16	17

Вариант 6										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	12	13	18	14	22	19	16	17	20
	C_i	5	3	6	2	4	5	3	8	1
Зад. 2	T_j	25	60	35	45	45	30	25	50	20
Зад. 3	A	61	85	44	72	25	52	74	33	19
	B	21	32	53	40	55	30	10	62	10

Вариант 7										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	41	63	82	54	33	92	67	74	28
	C_i	15	13	16	12	14	25	13	18	15
Зад. 2	T_j	48	23	31	50	45	20	25	55	30
Зад. 3	A	16	18	14	7	12	5	7	3	9
	B	9	13	8	4	15	3	2	6	7

Вариант 8										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	10	9	5	11	14	21	16	12	10
	C_i	5	2	6	7	4	7	3	8	9
Зад. 2	T_j	14	22	25	19	40	10	25	50	35
Зад. 3	A	19	14	15	17	12	10	17	13	9
	B	12	3	10	4	15	13	10	16	7

Вариант 9										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	41	16	81	55	13	9	16	17	25
	C_i	15	13	9	21	14	5	13	8	14
Зад. 2	T_j	85	20	35	45	40	10	25	50	30
Зад. 3	A	26	28	24	27	25	50	73	36	19
	B	12	13	15	24	45	35	51	26	17

Вариант 10										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	14	18	20	25	30	19	16	10	12
	C_i	5	6	8	12	15	7	13	8	5
Зад. 2	T_j	26	35	30	15	25	10	45	50	40
Зад. 3	A	62	85	45	37	28	54	37	30	29
	B	42	53	35	40	25	33	35	26	17

Вариант 11										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	12	16	22	24	33	18	14	15	13
	C_i	9	10	12	16	19	13	17	11	7
Зад. 2	T_j	23	32	27	12	22	7	42	46	37
Зад. 3	A	52	75	35	27	18	44	27	20	23
	B	32	43	25	30	15	23	25	16	17

Вариант 12										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	10	8	15	20	35	18	14	16	12
	C_i	5	6	9	12	15	9	10	8	4
Зад. 2	T_j	28	30	32	15	20	16	40	54	32
Зад. 3	A	60	72	45	39	28	50	36	20	49
	B	45	50	30	40	22	32	34	16	37

Вариант 13										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	10	14	20	22	31	16	12	13	11
	C_i	8	11	13	16	17	14	15	9	10
Зад. 2	T_j	21	30	25	12	20	7	40	46	35
Зад. 3	A	50	73	33	25	16	42	26	20	24
	B	34	41	23	30	12	22	23	16	18

Вариант 14										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	14	18	24	26	35	20	16	17	15
	C_i	10	14	12	16	15	13	19	11	7
Зад. 2	T_j	24	33	28	13	23	8	43	47	38
Зад. 3	A	54	77	37	29	20	46	29	22	25
	B	30	41	26	32	15	25	28	16	18

Вариант 15										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	4	8	10	15	17	19	16	10	12
	C_i	5	6	8	9	12	7	10	8	5
Зад. 2	T_j	24	32	30	16	27	10	43	50	40
Зад. 3	A	60	82	41	37	24	52	33	30	28
	B	42	50	39	40	27	33	35	26	17

Вариант 16										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	15	13	12	24	31	18	14	15	13
	C_i	7	10	12	16	19	13	15	10	7
Зад. 2	T_j	21	30	27	12	20	17	42	46	37
Зад. 3	A	54	42	31	26	18	43	27	20	23
	B	30	43	25	32	15	21	25	16	17

Вариант 17										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	14	18	15	20	35	19	13	16	12
	C_i	7	11	9	12	15	9	10	8	4
Зад. 2	T_j	26	33	30	15	20	14	40	52	32
Зад. 3	A	53	70	45	39	28	50	36	20	49
	B	40	51	30	42	22	32	34	16	37

Вариант 18										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	12	15	22	26	32	16	14	13	11
	C_i	8	11	13	16	17	14	15	9	10
Зад. 2	T_j	20	32	24	13	21	7	42	46	35
Зад. 3	A	53	71	32	24	15	40	26	20	24
	B	30	42	25	31	12	22	23	16	18

Вариант 19										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	10	18	22	23	35	20	16	17	15
	C_i	8	14	12	16	15	13	19	11	17
Зад. 2	T_j	28	32	27	13	23	18	40	47	38
Зад. 3	A	52	70	36	27	20	41	23	22	25
	B	33	41	26	32	15	25	28	17	18

Вариант 20										
№ заявки		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зад. 1	T_i	12	18	20	26	35	23	16	17	15
	C_i	9	11	12	17	15	13	19	11	7
Зад. 2	T_j	21	30	28	16	23	11	42	47	38
Зад. 3	A	56	79	32	26	23	42	29	22	25
	B	34	48	25	32	15	28	26	16	18

Часть 2

На СМО поступают заявки. Среднее время ожидания поступления очередной заявки — a ч. Среднее время обслуживания одной заявки — b ч. Найти предельные вероятности состояний системы, показатели эффективности СМО, рассчитать экономическую эффективность работы СМО, если доход от обслуживания одной заявки составляет c руб., а содержание одного канала обслуживания обходится в d руб./ч.

Расчеты провести для:

- 1) одноканальной СМО с отказами;
- 2) трехканальной СМО с отказами;
- 3) одноканальной СМО с неограниченной очередью;
- 4) четырехканальной СМО с неограниченной очередью;
- 5) одноканальной СМО с очередью не более трех заявок;
- 6) двухканальной СМО с очередью не более четырех заявок.

Варианты ИДЗ

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	4,0	4,0	2,0	4,0	6,0	5,0	8,0	6,0	7,0	9,0
b	3,5	2,5	1,5	2,5	4,5	4,5	7,5	5,5	6,5	8,5
c	8000	7000	7500	3500	2400	4200	6500	5500	9000	8000
d	300	400	240	120	95	150	150	100	300	200
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	10,0	12,0	3,0	4,0	6,0	5,0	8,0	6,0	7,0	9,0
b	8,5	10,5	1,5	3,0	2,5	4,0	6,5	3,5	6,0	8,0
c	9500	1500	8500	3500	3400	3200	6000	7500	8400	7000
d	200	400	260	150	105	150	250	200	320	250

Все промежуточные расчеты проводить с точностью до 5-го знака после запятой. Все ответы записать в десятичных дробях с точностью до 3-го знака после запятой. Экономическую эффективность записать с точностью до целого.

Часть 3

На СМО поступают заявки. Среднее время ожидания поступления очередной заявки — a ч. Среднее время обслуживания одной заявки — b ч. Найти предельные вероятности состояний системы, показатели эффективности СМО.

Расчеты провести для:

- 1) одноканальной СМО с предельным временем ожидания в очереди t ч;
- 2) трехканальной СМО с предельным временем ожидания в очереди t ч;
- 3) одноканальной замкнутой СМО с i источниками заявок;
- 4) трехканальной замкнутой СМО с i источниками заявок;
- 5) четырехканальной СМО с отказами и взаимопомощью между каналами типа «все как один», сравнить с аналогичной СМО без взаимопомощи каналов;
- 6) трехканальной СМО с неограниченной очередью и взаимопомощью между каналами типа «все как один», сравнить с аналогичной СМО без взаимопомощи каналов;
- 7) двухканальной СМО с очередью не более четырех заявок и взаимопомощью между каналами типа «все как один», сравнить с аналогичной СМО без взаимопомощи каналов.

Варианты ИДЗ

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	4,0	3,0	2,0	4,0	6,0	5,0	8,0	6,0	7,0	9,0
b	3,5	2,5	1,5	2,5	4,5	4,5	7,5	5,5	6,5	8,5
t	0,25	0,4	0,5	0,6	0,33	0,25	0,7	0,9	0,6	0,8
i	4,0	5,0	6,0	5,0	4,0	5,0	4,0	5,0	4,0	6,0

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	9,0	6,0	2,0	4,0	6,0	5,0	8,0	6,0	7,0	4,0
b	7,5	4,5	1,5	3,5	4,0	4,5	7,5	5,0	5,5	3,5
t	0,6	0,8	0,4	0,7	0,25	0,4	0,5	0,7	0,8	0,25
i	5,0	4,0	3,0	6,0	4,0	3,0	4,0	6,0	5,0	4,0

Все промежуточные расчеты проводить с точностью до 5-го знака после запятой. Все ответы записать в десятичных дробях с точностью до 3-го знака после запятой.

Приложение 1

Вопросы к зачету по ТМО

1. Предмет теории массового обслуживания. Основные понятия теории.
2. Классификация систем массового обслуживания.
3. Задача минимизации штрафа за задержку обслуживания.
4. Задача «директора» (задача одного станка).
5. Задача двух станков. Алгоритм Джонсона.
6. Потоки событий. Простейший поток событий.
7. Случайные процессы. Марковский процесс.
8. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности.
9. Процесс гибели и размножения. Формулы для предельных вероятностей.
10. Одноканальная СМО с отказами. Расчет показателей эффективности.
11. Многоканальная СМО с отказами. Расчет показателей эффективности.
12. Одноканальная СМО с неограниченной очередью. Формулы Литтла.
13. Многоканальная СМО с неограниченной очередью.
14. Одноканальная СМО с ограниченной очередью.
15. Многоканальная СМО с ограниченной очередью.
16. Многоканальная СМО с ограничением на время ожидания в очереди.
17. Одноканальная замкнутая СМО.

18. Многоканальная замкнутая СМО.

19. Многоканальная СМО с отказами и взаимопомощью между каналами типа «все как один».

20. Многоканальная СМО с неограниченной очередью и взаимопомощью между каналами типа «все как один».

21. Многоканальная СМО с ограниченной очередью и взаимопомощью между каналами типа «все как один».

22. Многоканальные СМО с равномерной взаимопомощью между каналами.

Приложение 2

Условные обозначения и формулы ТМО

Обозначения показателей

p_0 — вероятность того, что система свободна, т. е. находится в состоянии S_0 ;

p_k — вероятность того, что система находится в состоянии S_k ;

$P_{\text{сист}}$ — вероятность того, что заявка попадет в систему;

$P_{\text{об}}$ — вероятность того, что заявка будет обслужена;

$P_{\text{оч}}$ — вероятность наличия в системе очереди из заявок;

$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа заявке в обслуживании;

$P_{\text{зан}}$ — вероятность того, что канал занят обслуживанием заявки;

Q — относительная пропускная способность системы;

A — абсолютная пропускная способность системы;

$\bar{k}$ — среднее число занятых каналов;

$k_{\text{заг}}$ — коэффициент загрузки каналов;

ν — интенсивность потока обслуженных заявок, покидающих систему;

$L_{\text{оч}}$ — среднее число заявок, находящихся в очереди;

$L_{\text{об}}$ — среднее число заявок, находящихся под обслуживанием;

$L_{\text{сист}}$ — среднее число заявок, находящихся в системе;

$T_{\text{оч}}$ — среднее время пребывания заявки в очереди;

$T_{\text{об}}$ — среднее время обслуживания заявки в системе по отношению ко всем пришедшим заявкам (как обслуженным, так и необслуженным);

- $T_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;
 $N_{\text{пас}}$ — среднее число источников, находящихся в пассивном состоянии;
 $N_{\text{акт}}$ — среднее число источников, находящихся в активном состоянии;
 $P_{\text{акт}}$ — вероятность того, что источник находится в активном состоянии;
 $P_{\text{ух}}$ — вероятность ухода заявки из системы необслуженной;
 $v_{\text{ух}}$ — интенсивность потока ухода необслуженных заявок из системы.

Обозначение параметров СМО

- n — число обслуживающих каналов;
 m — число мест в очереди;
 λ — интенсивность потока входящих заявок;
 μ — интенсивность потока обслуживаний;
 ρ — приведенная интенсивность потока входящих заявок (трафик);
 ψ — средняя нагрузка каналов;
 $T_{\text{ож}}$ — ограниченное среднее время ожидания в очереди;
 ω — интенсивность ухода заявок из очереди;
 β — приведенная интенсивность потока уходов заявок из очереди;
 i — число источников заявок в замкнутых системах;
 Λ — средняя суммарная интенсивность потока заявок от активных источников.

Формулы ТМО

1. СМО с отказами

Показатель	n каналов	$n = 1$
p_0	$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}$	$p_0 = (1 + \rho)^{-1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$
p_k	$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq n$	$p_1 = \rho p_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$
$P_{\text{отк}}$	$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0$	$P_{\text{отк}} = \rho p_0 = \frac{\rho}{1 + \rho} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$
Q	$Q = 1 - P_{\text{отк}}$	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$
A	$A = \lambda Q$	$A = \lambda Q = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$
$L_{\text{об}}$	$L_{\text{об}} = \bar{k} = \rho Q = \frac{A}{\mu}$	$L_{\text{об}} = 1 - p_0 = \rho Q = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

2. СМО с неограниченной очередью

Показатель	n каналов ($\rho/n < 1$)	$n = 1$ ($\rho < 1$)
p_0	$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}$	$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots)^{-1} = 1 - \rho$
p_k	$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq n;$ $p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r n!} p_0, \quad 1 \leq r$	$p_k = \rho^k p_0 = \rho^k (1 - \rho), \quad 1 \leq k$
$P_{\text{оч}}$	$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0$	$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} p_0 = \rho^2$

Показатель	n каналов ($\rho/n < 1$)	$n = 1$ ($\rho < 1$)
$P_{\text{отк}}$	$P_{\text{отк}} = 0$	$P_{\text{отк}} = 0$
Q	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1$	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1$
A	$A = \lambda Q = \lambda$	$A = \lambda Q = \lambda$
$L_{\text{об}}$	$L_{\text{об}} = \bar{k} = \rho Q = \frac{A}{\mu} = \rho$	$L_{\text{об}} = 1 - p_0 = \rho Q = \frac{A}{\mu} = \rho$
$L_{\text{оч}}$	$L_{\text{оч}} = \frac{n}{n-\rho} P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!} \frac{n}{(n-\rho)^2} p_0$	$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} p_0 = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
$L_{\text{сист}}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = \frac{\rho}{1-\rho}$

3. СМО с ограниченной очередью (не более m заявок в очереди; $\rho/n \neq 1$)

Показатель	n каналов ($\rho/n \neq 1$)	$n = 1$ ($\rho \neq 1$)
p_0	$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)} \right)^{-1}$	$p_0 = \left(1 + \rho + \dots + \rho^{m+1} \right)^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$
p_k	$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq n; \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r n!} p_0, \quad 1 \leq r \leq m$	$p_k = \rho^k p_0, \quad 1 \leq k \leq m+1$
$P_{\text{оч}}$	$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)} p_0$	$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^2 (1-\rho^m)}{1-\rho} p_0 = \rho^2 \frac{1-\rho^m}{1-\rho^{m+2}}$
$P_{\text{отк}}$	$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$	$P_{\text{отк}} = \rho^{m+1} p_0$

Показатель	n каналов ($\rho/n \neq 1$)	$n = 1$ ($\rho \neq 1$)
Q	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \rho^{m+1} p_0$
A	$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 \right)$	$A = \lambda Q = \lambda (1 - \rho^{m+1} p_0)$
$L_{\text{об}}$	$L_{\text{об}} = \bar{k} = \rho Q = \frac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 \right)$	$L_{\text{об}} = 1 - p_0 = \rho Q = \frac{A}{\mu} = \rho (1 - \rho^{m+1} p_0)$
$L_{\text{оч}}$	$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \left(m+1 - m \frac{\rho}{n} \right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2} p_0$	$L_{\text{оч}} = \rho^2 \frac{1 - \rho^m (m+1 - m\rho)}{(1-\rho)^2} p_0$
$L_{\text{сист}}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}}$
$T_{\text{об}}$	$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda}$	$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda}$
$T_{\text{оч}}$	$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}$	$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}$
$T_{\text{сист}}$	$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}$	$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}$

3а. СМО с ограниченной очередью (не более m заявок в очереди). Частный случай: $\rho/n = 1$.

Показатель	n каналов ($\rho/n = 1$)	$n = 1$ ($\rho = 1$)
p_0	$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + m \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}$	$p_0 = (1 + \rho + m\rho)^{-1} = \frac{1}{m+2}$
p_k	$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq n;$ $p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad 1 \leq r \leq m$	$p_k = p_0 = \frac{1}{m+2}, \quad 1 \leq k \leq m+1$

Показатель	n каналов ($\rho/n = 1$)	$n = 1$ ($\rho = 1$)
$P_{оч}$	$P_{оч} = m \frac{\rho^n}{n!} p_0$	$P_{оч} = m p_0 = \frac{m}{m+2}$
$P_{отк}$	$P_{отк} = \frac{\rho^n}{n!} p_0$	$P_{отк} = p_0 = \frac{1}{m+2}$
Q	$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0$	$Q = 1 - P_{отк} = 1 - p_0 = \frac{m+1}{m+2}$
A	$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right)$	$A = \lambda Q = \lambda \frac{m+1}{m+2}$
$L_{об}$	$L_{об} = \bar{k} = \rho Q = \frac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right)$	$L_{об} = 1 - p_0 = \rho Q = \frac{A}{\mu} = \frac{m+1}{m+2}$
$L_{оч}$	$L_{оч} = \frac{\rho^n (m+1)m}{n!} p_0$	$L_{оч} = \frac{(m+1)m}{2} p_0 = \frac{(m+1)m}{2(m+2)}$
$L_{сист}$	$L_{сист} = L_{оч} + L_{об}$	$L_{сист} = L_{оч} + L_{об}$
$T_{об}$	$T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda}$	$T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda}$
$T_{оч}$	$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$	$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$
$T_{сист}$	$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}$	$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}$

4. СМО с ограниченным ожиданием в очереди ($m = \infty$, $T_{оч} \leq T_{ож}$)

Показатель	n каналов	$n = 1$
p_0	$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta) \dots (n+m\beta)} \right)^{-1}$	$p_0 = \left(1 + \rho + \rho \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(1+\beta) \dots (1+m\beta)} \right)^{-1}$

Показатель	n каналов	$n = 1$
p_k	$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq n;$ $p_{n+m} = \frac{\rho^n}{n!} \frac{\rho^m}{(n+\beta) \dots (n+m\beta)} p_0, \quad m = 1, 2, \dots$	$p_1 = \rho p_0,$ $p_{1+m} = \frac{\rho^{m+1}}{(1+\beta) \dots (1+m\beta)} p_0, \quad m = 1, 2, \dots$
$P_{оч}$	$P_{оч} = p_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(n+\beta) \dots (n+m\beta)}$	$P_{оч} = p_0 \rho \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{(1+\beta) \dots (1+m\beta)}$
$P_{об}$	$P_{об} = Q = \frac{A}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\rho}; \quad P_{об} \neq 1 - P_{отк}$	$P_{об} = Q = \frac{A}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\rho}; \quad P_{об} \neq 1 - P_{отк}$
$P_{отк}$	$P_{отк} = 0$	$P_{отк} = 0$
$P_{сист}$	$P_{сист} = 1$	$P_{сист} = 1$
$\bar{k}$	$\bar{k} = n - \sum_{k=0}^n (n-k) p_k = L_{об} = \rho - \beta L_{оч}$	$\bar{k} = 1 - p_0 = L_{об} = \rho - \beta L_{оч}$
Q	$Q = P_{об} = \frac{\bar{k}}{\rho} = \frac{A}{\lambda} = 1 - \frac{\omega}{\lambda} L_{оч}; \quad Q \neq 1 - P_{отк}$	$Q = \frac{\bar{k}}{\rho} = \frac{1-p_0}{\rho} = P_{об}; \quad Q \neq 1 - P_{отк}$
A	$A = \lambda Q = \mu \bar{k} = \lambda - \omega L_{оч}$	$A = \lambda Q = \mu \bar{k} = \mu(1 - p_0)$
$L_{об}$	$L_{об} = \bar{k} = \rho Q = \frac{A}{\mu} = \rho - \beta L_{оч}$	$L_{об} = 1 - p_0 = \rho Q = \frac{A}{\mu} = \rho - \beta L_{оч} = \bar{k}$
$L_{оч}$	$L_{оч} = \frac{\rho - \bar{k}}{\beta} = \frac{\rho(1-Q)}{\beta}$	$L_{оч} = \frac{\rho - \bar{k}}{\beta} = \frac{\rho + p_0 - 1}{\beta}$
$L_{сист}$	$L_{сист} = L_{оч} + L_{об} = \frac{\rho + (\beta-1)\bar{k}}{\beta}$	$L_{сист} = L_{оч} + L_{об} = \frac{\rho + (\beta-1)(1-p_0)}{\beta}$
P_{yx}	$P_{yx} = 1 - P_{об} = 1 - Q = \frac{\omega}{\lambda} L_{оч} = \omega T_{оч}$	$P_{yx} = 1 - P_{об} = 1 - Q = \frac{\omega}{\lambda} L_{оч} = \omega T_{оч}$
v_{yx}	$v_{yx} = \omega L_{оч} = \lambda - \mu \bar{k}$	$v_{yx} = \omega L_{оч} = \lambda - \mu(1 - p_0)$
v	$v = A$	$v = A$
$T_{оч}$	$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1-Q}{\omega}$	$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1-Q}{\omega}$

Показатель	n каналов	$n = 1$
$T_{об}$	$T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\lambda} = \frac{A}{\lambda\mu} = \frac{Q}{\mu}$	$T_{об} = \frac{L_{об}}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\lambda} = \frac{A}{\lambda\mu} = \frac{Q}{\mu} = \frac{1-p_0}{\lambda}$
$T_{сист}$	$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = T_{оч} + T_{об} = \frac{1-Q}{\omega} + \frac{Q}{\mu}$	$T_{сист} = T_{оч} + T_{об} = \frac{1-Q}{\omega} + \frac{1-p_0}{\lambda}$

5. Замкнутые СМО (i источников заявок)

Показатель	n каналов	$n = 1$
p_0	$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{i!}{(i-k)!} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=n+1}^i \frac{i!}{(i-k)!} \frac{\rho^{k-n}}{n^{k-n}} \right)^{-1}$	$p_0 = \left(\sum_{k=0}^i \frac{i!}{(i-k)!} \rho^k \right)^{-1}$
p_k	$p_k = \frac{i!}{(i-k)!} \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq n;$ $p_k = \frac{i!}{(i-k)!} \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} p_0, \quad n+1 \leq k \leq i.$	$p_k = \frac{i!}{(i-k)!} \rho^k p_0, \quad 1 \leq k \leq i$
$P_{оч}$	$P_{оч} = p_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=n+1}^i \frac{i!}{(i-k)!} \frac{\rho^{k-n}}{n^{k-n}}$	$P_{оч} = 1 - p_0 - p_1$
$P_{отк}$	$P_{отк} = 0$	$P_{отк} = 0$
Q	$Q = 1$	$Q = 1$
$\bar{k}$	$\bar{k} = n - \sum_{k=0}^n (n-k) p_k = L_{об}$	$\bar{k} = 1 - p_0 = L_{об} = P_{зан}$
A	$A = \mu \bar{k} = \Lambda Q = \Lambda = \lambda N_{акт} = \lambda(i - N_{пас}) = \nu$	$A = \Lambda = \mu \bar{k} = \mu(1 - p_0)$
$L_{об}$	$L_{об} = \bar{k} = \frac{A}{\mu} = n - \sum_{k=0}^n (n-k) p_k$	$L_{об} = \bar{k} = 1 - p_0 = \frac{\Lambda}{\mu} = \frac{A}{\mu}$
$L_{оч}$	$L_{оч} = i - \bar{k} \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right)$	$L_{оч} = i - (1 - p_0) \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right)$
$L_{сист}$	$L_{сист} = N_{пас} = L_{оч} + L_{об} = i - \frac{\bar{k}}{\rho}$	$L_{сист} = N_{пас} = i - \frac{1 - p_0}{\rho}$

Показатель	n каналов	$n = 1$
$N_{\text{акт}}$	$N_{\text{акт}} = \frac{A}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\rho}$	$N_{\text{акт}} = \frac{A}{\lambda} = \frac{\bar{k}}{\rho} = \frac{1-p_0}{\rho}$
$N_{\text{пас}}$	$N_{\text{пас}} = i - N_{\text{акт}} = i - \frac{\bar{k}}{\rho}$	$N_{\text{пас}} = i - N_{\text{акт}} = i - \frac{1-p_0}{\rho}$
ν	$\nu = A = \Lambda$	$\nu = A = \Lambda$
$P_{\text{акт}}$	$P_{\text{акт}} = \frac{N_{\text{акт}}}{i} = \frac{A}{i\lambda} = \frac{\Lambda}{i\lambda}$	$P_{\text{акт}} = \frac{N_{\text{акт}}}{i} = \frac{A}{i\lambda} = \frac{\Lambda}{i\lambda}$
$T_{\text{оч}}$	$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda}$	$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\Lambda}$
$T_{\text{об}}$	$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\Lambda} = \frac{\bar{k}}{\Lambda} = \frac{1}{\mu} = \bar{t}_{\text{об}}$	$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\Lambda} = \frac{\bar{k}}{\Lambda} = \frac{1}{\mu} = \bar{t}_{\text{об}}$
$T_{\text{сист}}$	$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda} = T_{\text{оч}} + T_{\text{об}}$	$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\Lambda} = T_{\text{оч}} + T_{\text{об}}$

6. СМО со взаимопомощью между каналами типа «все как один» (n каналов)

Показатель	с неограниченной очередью ($\psi = \rho/n < 1$)	с отказами
p_0	$p_{0+} = 1 - \frac{\rho}{n} = \frac{n-\rho}{n} = 1 - \psi$	$p_{0+} = \frac{n}{\rho+n}$
p_k	$p_{k+} = \left(\frac{\rho}{n}\right)^k \frac{n-\rho}{n} = \psi^k (1-\psi), \quad 1 \leq k$	$p_{1+} = \frac{\rho}{\rho+n}$
$P_{\text{оч}}$	$P_{\text{оч}+} = \frac{\rho^2}{n^2} = \psi^2$	$P_{\text{оч}+} = 0$
$P_{\text{отк}}$	$P_{\text{отк}+} = 0$	$P_{\text{отк}+} = p_{1+} = \frac{\rho}{\rho+n}$
$P_{\text{об}}$	$P_{\text{об}+} = 1$	$P_{\text{об}+} = p_{0+} = \frac{n}{\rho+n}$

Показатель	с неограниченной очередью ($\psi = \rho/n < 1$)	с отказами
Q	$Q_+ = 1$	$Q_+ = P_{об+} = 1 - P_{отк+} = \frac{n}{\rho + n}$
A	$A_+ = \lambda$	$A_+ = \lambda Q_+ = \frac{\lambda n}{\rho + n}$
$\bar{k}$	$\bar{k}_+ = n L_{об+} = \rho$	$\bar{k}_+ = \frac{A_+}{\mu} = \rho Q_+ = \frac{\rho n}{\rho + n}$
$L_{об}$	$L_{об+} = \frac{A_+}{n\mu} = \frac{\rho Q_+}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\rho}{n} = \psi$	$L_{об+} = p_{1+} = \frac{\rho}{\rho + n}; L_{об+} \neq \bar{k}_+$
$L_{оч}$	$L_{оч+} = \frac{\rho^2}{n(n-\rho)} = \frac{\psi^2}{1-\psi}$	$L_{оч+} = 0$
$L_{сист}$	$L_{сист+} = L_{оч+} + L_{об+} = \frac{\rho}{n-\rho} = \frac{\psi}{1-\psi}$	$L_{сист+} = L_{об+} = \frac{\rho}{\rho + n}$
v	$v_+ = A_+$	$v_+ = A_+$
$T_{об}$	$T_{об+} = \frac{L_{об+}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda n} = \frac{1}{n\mu} = \bar{t}_{об+}$	$T_{об+} = \frac{L_{об+}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(\rho + n)} = \frac{1}{\lambda + n\mu}$
$T_{оч}$	$T_{оч+} = \frac{L_{оч+}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda n(n-\rho)} = \frac{\psi^2}{\lambda(1-\psi)}$	$T_{оч+} = 0$
$T_{сист}$	$T_{сист+} = \frac{L_{сист+}}{\lambda} = \frac{1}{\mu(n-\rho)} = \frac{1}{n\mu(1-\psi)}$	$T_{сист+} = T_{об+} = \frac{\rho}{\lambda(\rho + n)} = \frac{1}{\lambda + n\mu}$
Сравнение с СМО без взаимопомощи		Сравнение с СМО без взаимопомощи
P	$P_{оч+} > P_{оч}$	$P_{отк+} > P_{отк}$
Q, A	$Q_+ = Q = 1, A_+ = A = \lambda$	$Q_+ < Q, A_+ < A$
L	$L_{оч+} > L_{оч}; L_{об+} = L_{об} / n; L_{сист+} < L_{сист}$	$L_{сист+} = L_{об+} < L_{об} = L_{сист}$
T	$T_{оч+} > T_{оч}; T_{об+} = T_{об} / n; T_{сист+} < T_{сист}$	$T_{сист+} = T_{об+} < T_{об} = T_{сист}$

7. СМО с ограниченной очередью (не более m заявок в очереди) и со взаимопомощью между каналами типа «все как один» (n каналов)

Показатель	$\psi = \rho/n \neq 1$	$\psi = \rho/n = 1$
p_0	$p_{0+} = \frac{1-\psi}{1-\psi^{m+2}}$	$p_{0+} = \frac{1}{m+2}$
p_k	$p_{k+} = \psi^k \frac{1-\psi}{1-\psi^{m+2}} = \psi^k p_{0+}, \quad 1 \leq k \leq m+1$	$p_{k+} = \frac{1}{m+2}, \quad 1 \leq k \leq m+1$
$P_{\text{оч}}$	$P_{\text{оч}+} = \psi^2 \frac{1-\psi^m}{1-\psi^{m+2}}$	$P_{\text{оч}+} = \frac{m}{m+2}$
$P_{\text{отк}}$	$P_{\text{отк}+} = \psi^{m+1} \frac{1-\psi}{1-\psi^{m+2}}$	$P_{\text{отк}+} = \frac{1}{m+2}$
Q	$Q_+ = P_{\text{об}+} = 1 - P_{\text{отк}+} = \frac{1-\psi^{m+1}}{1-\psi^{m+2}}$	$Q_+ = P_{\text{об}+} = 1 - P_{\text{отк}+} = \frac{m+1}{m+2}$
A	$A_+ = \lambda Q_+ = \lambda \frac{1-\psi^{m+1}}{1-\psi^{m+2}}$	$A_+ = \lambda Q_+ = \frac{\lambda(m+1)}{m+2}$
$\bar{k}$	$\bar{k}_+ = n L_{\text{об}+} = n \psi \frac{1-\psi^{m+1}}{1-\psi^{m+2}}$	$\bar{k}_+ = n Q_+ = n \frac{m+1}{m+2}$
$L_{\text{об}}$	$L_{\text{об}+} = \psi Q_+ = \psi \frac{1-\psi^{m+1}}{1-\psi^{m+2}}; \quad L_{\text{об}+} \neq \bar{k}_+$	$L_{\text{об}+} = Q_+ = \frac{m+1}{m+2}; \quad L_{\text{об}+} \neq \bar{k}_+$
$L_{\text{оч}}$	$L_{\text{оч}+} = \psi^2 \frac{1-\psi^m(m+1-m\psi)}{(1-\psi^{m+2})(1-\psi)}$	$L_{\text{оч}+} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)}$
$L_{\text{сист}}$	$L_{\text{сист}+} = L_{\text{оч}+} + L_{\text{об}+}$	$L_{\text{сист}+} = L_{\text{оч}+} + L_{\text{об}+} = \frac{m+1}{2}$
ν	$\nu_+ = A_+ = \lambda Q_+$	$\nu_+ = A_+ = \lambda Q_+$
$T_{\text{об}}$	$T_{\text{об}+} = \frac{L_{\text{об}+}}{\lambda}$	$T_{\text{об}+} = \frac{L_{\text{об}+}}{\lambda} = \frac{m+1}{\lambda(m+2)}$

Показатель	$\psi = \rho/n \neq 1$	$\psi = \rho/n = 1$
$T_{\text{оч}}$	$T_{\text{оч}+} = \frac{L_{\text{оч}+}}{\lambda}$	$T_{\text{оч}+} = \frac{L_{\text{оч}+}}{\lambda} = \frac{m(m+1)}{2\lambda(m+2)}$
$T_{\text{сист}}$	$T_{\text{сист}+} = \frac{L_{\text{сист}+}}{\lambda}$	$T_{\text{сист}+} = \frac{L_{\text{сист}+}}{\lambda} = \frac{m+1}{2\lambda}$
Сравнение с СМО без взаимопомощи		Сравнение с СМО без взаимопомощи
P	$P_{\text{оч}+} > P_{\text{оч}}; P_{\text{отк}+} > P_{\text{отк}}$	$P_{\text{оч}+} > P_{\text{оч}}; P_{\text{отк}+} > P_{\text{отк}}$
Q, A	$Q_+ < Q, A_+ < A$	$Q_+ < Q, A_+ < A$
L	$L_{\text{оч}+} > L_{\text{оч}}; L_{\text{об}+} < L_{\text{об}}; L_{\text{сист}+} < L_{\text{сист}}$	$L_{\text{оч}+} > L_{\text{оч}}; L_{\text{об}+} < L_{\text{об}}; L_{\text{сист}+} < L_{\text{сист}}$
T	$T_{\text{оч}+} > T_{\text{оч}}; T_{\text{об}+} < T_{\text{об}}; T_{\text{сист}+} < T_{\text{сист}}$	$T_{\text{оч}+} > T_{\text{оч}}; T_{\text{об}+} < T_{\text{об}}; T_{\text{сист}+} < T_{\text{сист}}$

8. СМО с равномерной взаимопомощью между каналами (n каналов)

Показатель	с отказами ($\psi = \rho/n \neq 1$)	с очередью из m заявок ($\psi \neq 1$)
p_0	$p_0 = \frac{1-\psi}{1-\psi^{n+1}}$	$p_0 = \frac{1-\psi}{1-\psi^{n+m+1}}$
p_k	$p_k = \psi^k p_0, 1 \leq k \leq n$	$p_k = \psi^k p_0, 1 \leq k \leq n+m$
$P_{\text{оч}}$	$P_{\text{оч}} = 0$	$P_{\text{оч}} = \psi^{n+1} \frac{1-\psi^m}{1-\psi^{n+m+1}}$
$P_{\text{отк}}$	$P_{\text{отк}} = \psi^n p_0 = \psi^n \frac{1-\psi}{1-\psi^{n+1}}$	$P_{\text{отк}} = \psi^{n+m} p_0 = \psi^{n+m} \frac{1-\psi}{1-\psi^{n+m+1}}$
Q	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{1-\psi^n}{1-\psi^{n+1}}$	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{1-\psi^{n+m}}{1-\psi^{n+m+1}}$
A	$A = \lambda Q = \lambda \frac{1-\psi^n}{1-\psi^{n+1}}$	$A = \lambda Q = \lambda \frac{1-\psi^{n+m}}{1-\psi^{n+m+1}}$
$\bar{k}$	$\bar{k} = n(1 - p_0).$	$\bar{k} = n(1 - p_0)$

Показатель	с отказами ($\psi = \rho/n \neq 1$)	с очередью из m заявок ($\psi \neq 1$)
$k_{\text{заг}}$	$k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0$	$k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0$
$L_{\text{об}}$	$L_{\text{об}} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - m\psi)}{(1 - \psi)(1 - \psi^{n+1})}$	$L_{\text{об}} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - m\psi)}{(1 - \psi)(1 - \psi^{n+m+1})}$
$L_{\text{оч}}$	$L_{\text{оч}} = 0$	$L_{\text{оч}} = \psi^{n+1} \frac{1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)}{(1 - \psi)(1 - \psi^{n+m+1})}$
$L_{\text{сист}}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{об}}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}}$
$T_{\text{об}}$	$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda}$	$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda}$
$T_{\text{оч}}$	$T_{\text{оч}} = 0$	$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}$
$T_{\text{сист}}$	$T_{\text{сист}} = T_{\text{об}}$	$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}$

8а. СМО с равномерной взаимопомощью между каналами (n каналов). Частный случай: $\psi = \rho/n = 1$

Показатель	с отказами ($\psi = \rho/n = 1$)	с очередью из m заявок ($\psi = 1$)
p_0	$p_0 = \frac{1}{n+1}$	$p_0 = \frac{1}{n+m+1}$
p_k	$p_k = p_0 = \frac{1}{n+1}, 1 \leq k \leq n$	$p_k = p_0 = \frac{1}{n+m+1}, 1 \leq k \leq n+m$
$P_{\text{оч}}$	$P_{\text{оч}} = 0$	$P_{\text{оч}} = mp_0 = \frac{m}{n+m+1}$
$P_{\text{отк}}$	$P_{\text{отк}} = p_n = p_0 = \frac{1}{n+1}$	$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = p_0 = \frac{1}{n+m+1}$

Показатель	с отказами ($\psi = \rho/n = 1$)	с очередью из m заявок ($\psi = 1$)
Q	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{n}{n+1}$	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{n+m}{n+m+1}$
A	$A = \lambda Q = \lambda \frac{n}{n+1}$	$A = \lambda Q = \lambda \frac{n+m}{n+m+1}$
$\bar{k}$	$\bar{k} = n(1 - p_0) = \frac{n^2}{n+1}$	$\bar{k} = n(1 - p_0) = \frac{n(n+m)}{n+m+1}$
$k_{\text{заг}}$	$k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0 = \frac{n}{n+1}$	$k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0 = \frac{n+m}{n+m+1}$
$L_{\text{об}}$	$L_{\text{об}} = \frac{n}{2}$	$L_{\text{об}} = \frac{n(n+1)}{2(n+m+1)}$
$L_{\text{оч}}$	$L_{\text{оч}} = 0$	$L_{\text{оч}} = \frac{m(m+1)}{2(n+m+1)}$
$L_{\text{сист}}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{об}} = \frac{n}{2}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = \frac{m(m+1) + n(n+1)}{2(n+m+1)}$
$T_{\text{об}}$	$T_{\text{об}} = \frac{n}{2\lambda}$	$T_{\text{об}} = \frac{n(n+1)}{2\lambda(n+m+1)}$
$T_{\text{оч}}$	$T_{\text{оч}} = 0$	$T_{\text{оч}} = \frac{m(m+1)}{2\lambda(n+m+1)}$
$T_{\text{сист}}$	$T_{\text{сист}} = T_{\text{об}} = \frac{n}{2\lambda}$	$T_{\text{сист}} = T_{\text{оч}} + T_{\text{об}} = \frac{m(m+1) + n(n+1)}{2\lambda(n+m+1)}$

**9. СМО с неограниченной очередью
и равномерной взаимопомощью между каналами**

Показатель	n каналов ($\psi = \rho/n < 1$)
p_0	$p_0 = 1 - \psi$
p_k	$p_k = \psi^k p_0 = \psi^k (1 - \psi), 1 \leq k$

Показатель	n каналов ($\psi = \rho/n < 1$)
$P_{\text{оч}}$	$P_{\text{оч}} = \frac{\psi^{n+1}}{1-\psi} p_0 = \psi^{n+1}$
$P_{\text{отк}}$	$P_{\text{отк}} = 0$
$P_{\text{об}}$	$P_{\text{об}} = 1$
Q	$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1$
A	$A = \lambda Q = \lambda$
$\bar{k}$	$\bar{k} = n(1 - p_0) = n\psi = \rho$
$k_{\text{заг}}$	$k_{\text{заг}} = \frac{\bar{k}}{n} = 1 - p_0 = \psi$
$L_{\text{об}}$	$L_{\text{об}} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{1 - \psi}$
$L_{\text{оч}}$	$L_{\text{оч}} = \frac{\psi^{n+1}}{(1-\psi)^2} p_0 = \frac{\psi^{n+1}}{1-\psi}$
$L_{\text{сист}}$	$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{об}} = \psi \frac{1 - n\psi^n (1 - \psi)}{1 - \psi}$
$T_{\text{об}}$	$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda} = \psi \frac{1 - \psi^n (n + 1 - n\psi)}{\lambda(1 - \psi)}$
$T_{\text{оч}}$	$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{\psi^{n+1}}{\lambda(1 - \psi)}$
$T_{\text{сист}}$	$T_{\text{сист}} = T_{\text{оч}} + T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \psi \frac{1 - n\psi^n (1 - \psi)}{\lambda(1 - \psi)}$

Формулы Литтла

$$T_{\text{об}} = \frac{L_{\text{об}}}{\lambda}$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}$$

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda}$$

Приложение 3

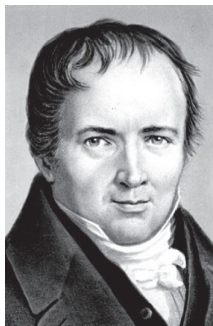
Краткие биографические сведения



Гант, Генри Лоренс¹ (20.05.1861–23.11.1919) — соратник «отца научного менеджмента» Фредерика Тейлора.

Гант изучал менеджмент на примере постройки кораблей во время Первой мировой войны и предложил свою диаграмму, состоящую из отрезков (задач) и точек (завершающих задач или вех), как средство для представления длительности и последовательности задач в проекте. Диаграмма Ганта — наглядный и удобный инструмент для управления проектом. Диаграмма дает возможность наглядно представлять как последовательные шаги выполнения проекта, так и задачи, требующие одновременного выполнения.

¹ Гант, Генри Лоренс : википедия. URL: <https://clck.ru/oqRWZ> (дата обращения: 10.10.2021).



Пуассон, Симеон Дени¹ (21.06.1781–25.04.1840) — французский математик, механик и физик. Член Парижской академии наук (1812 г.), иностранный член Лондонского королевского общества (1818 г.), иностранный почетный член Петербургской академии наук (1826 г.). Число учёных трудов Пуассона превосходит 300. Они относятся к разным областям чистой математики, математической физики, теоретической и небесной механики, включая теорию притяжения, теорию упругости, гидромеханику, электростатику и магнетизм. Имя Пуассона внесено в список имен 72-х величайших учёных Франции, размещённый на одном из этажей Эйфелевой башни.



Марков, Андрей Андреевич (старший)² (2(14) июня 1856, Рязань — 20 июля 1922, Петроград) — русский математик, академик, внесший большой вклад в теорию вероятностей, математический анализ и теорию чисел. А. А. Марков является первооткрывателем обширного класса стохастических процессов с дискретным и непрерывным временем, названных его именем. Теория цепей Маркова выросла в огромную и весьма важную область научных исследований — теорию марковских случайных процессов.

¹ Пуассон, Симеон Дени : википедия. URL: <https://clck.ru/orgn7> (дата обращения: 10.10.2021).

² Марков, Андрей Андреевич (старший) : универсальная библиотека. URL: <https://clck.ru/sSMr4> (дата обращения: 10.10.2021).



Колмогоров, Андрей Николаевич¹ (25 апреля 1903, Тамбов — 20 октября 1987, Москва) — один из самых выдающихся математиков XX в, человек с широчайшим математическим кругозором. А. Н. Колмогоров прежде всего известен своим неотъемлемым вкладом в такие области математики, как топология, геометрия, функциональный анализ, теория меры, теория дифференциальных уравнений, теория динамических систем, теория информации, классическая механика и многие другие, фактически является основоположником современной аксиоматики теории вероятностей. Иностранный член многих зарубежных академий наук.

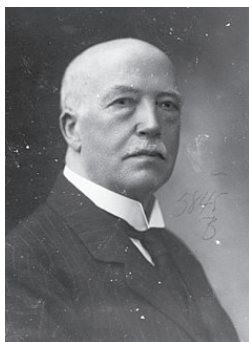


Эрланг, Агнер Краруп² (1.01.1878—3.02.1929) — датский математик, статистик и инженер, основатель научного направления по изучению трафика в телекоммуникационных системах и теории массового обслуживания.

В 1909 г. он опубликовал свою первую работу: «Теория вероятностей и телефонные разговоры». Эта работа была признана во всем мире и его формула для расчета доли вызовов, получающих обслуживание на сельской телефонной станции, была принята для использования в крупнейшей почтовой службе мира — Главном почтамте Великобритании.

¹ Колмогоров, Андрей Николаевич : википедия. URL: <https://clck.ru/FFGtn> (дата обращения: 10.10.2021).

² Эрланг, Агнер Краруп : википедия. URL: <https://clck.ru/ori2W> (дата обращения: 10.10.2021).



Энгсет, Тóре Олáус¹ (08.05.1865—1943) — норвежский математик и инженер, пионер в области теории телетрафика и теории массового обслуживания,

Энгсет разработал свою знаменитую формулу в 1915 г., ещё до прорывных открытий Эрланга, которые тот сделал в 1917 г.. Однако, манускрипт Энгсета существовал на норвежском языке, и был опубликован только в 1918 г. в переводе на немецкий язык. Английский перевод опубликован только в 1998 г. Свои работы по ядерной физике Энгсет опубликовал в 1926—1927 гг.

¹ Энгсет, Тóре Олáус : википедия. URL: <https://clck.ru/gcM8x> (дата обращения: 10.10.2021).

Библиографический список

1. Форум программистов и сисадминов : CyberForum. URL: <https://www.cyberforum.ru/> (дата обращения: 10.08.2021).
2. Публикация материала для обучения : Leksii.org. URL: <https://leksii.org/> (дата обращения: 12.09.2021).
3. Бурда, А. Г. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 564 с. — ISBN 978-5-8114-3149-6.
4. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — Москва : Советское радио, 1972. — 552 с.
5. Вентцель, Е. С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология : учеб. пособие / Е. С. Вентцель. — 5-е изд., стер. — Москва : КноРус, 2010. — 192 с.
6. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — Москва : Наука, 1966. — 431 с.
7. Есипов, Б. А. Методы исследования операций : учеб. пособие / Б. А. Есипов. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 304 с. — ISBN 978-5-8114-0917-4.
8. Исследование операций в экономике : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2021. — 414 с. — ISBN 978-5-534-12800-0.
9. Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Т. Л. Саати. — Москва : Советское радио, 1965. — 510 с.
10. Скитович, В. П. Элементы теории массового обслуживания / В. П. Скитович. — Ленинград : Изд. ЛГУ, 1976. — 96 с.
11. Черчмен, У. Введение в исследование операций / У. Черчмен, Р. Акоф, Л. Арноф. — Москва : Наука, 1967. — 488 с.

Учебное издание

Плескунов Михаил Александрович

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие

Редактор З. Р. Картавцева
Верстка Е. В. Ровнушкиной

Подписано в печать 24.08.2022. Формат 70×100 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 21,3.
Уч.-изд. л. 15,43. Тираж 30 экз. Заказ 161.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
<http://print.urfu.ru>

Для заметок

